Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 1

Analysis II SS 2013

(Abgabe: 16.04.2013)

Aufgabe 1
Für $n \geq 1$ definiere das Legendre-Polynom P_n als

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

(i) Zeigen Sie, dass P_n genau n paarweise verschiedene Nullstellen im Intervall $(-1,1)$ besitzt.
Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Rolle.
(ii) Beweisen Sie für jedes $n \geq 1$ die Gleichung

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Aufgabe 2
Es seien P_n die Polynome aus Aufgabe 1. Zeigen Sie mithilfe partieller Integration:
(i) $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0$ für $n \neq m$.
(ii) $\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}$.

Aufgabe 3
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvex, d. h. es gelte $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ für alle $x, y \in [a,b]$ und jedes $\lambda \in [0,1]$.
(i) Zeigen Sie für jedes $x \in [a,b]$:

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(x) + f(a+b-x) \text{ und } f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a).$$

(ii) Beweisen Sie die Ungleichungen

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Hinweis: Sie können die Riemann-Integrierbarkeit von f als bekannt voraussetzen.

Aufgabe 4
Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(i) $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ und $\int_1^2 \frac{\ln(x^2)}{x}\,dx$. (ii) $\int_0^1 x^2 \exp(\sqrt{x})\,dx$.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 08.04-11.04 besprochen werden:

- Wiederholen Sie den Satz von Rolle und den Mittelwertsatz.

  Zeigen Sie z. B. mithilfe des Satzes von Rolle und vollständiger Induktion, dass ein reelles Polynom vom Grad n höchstens n paarweise verschiedene Nullstellen haben kann.

- Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die Leibnizsche Formel

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

- Wiederholen Sie den Begriff des Riemann-Integrals.

  Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie: Existiert ein $\delta > 0$ mit $f(x) \geq \delta$ für alle $x \in [a,b]$, dann ist die Funktion $x \mapsto 1/f(x)$ ebenfalls Riemann-integrierbar auf $[a,b]$.

- Wiederholen Sie den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung und die Rechenregeln für die Integration.

  Zeigen Sie: Für jede stetig differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt die Formel

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b (x - \frac{a+b}{2}) f'(x)\,dx.$$

  Hinweis: Benutzen Sie partielle Integration.

- Berechnen Sie die unbestimmten Integrale $\int x^2 exp(\lambda x)\,dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\int x \ln(2-x^2)\,dx$. Geben Sie bei dem letzteren Integral den Definitionsbereich an.

- Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale: $\int_0^2 |1-x|\,dx$ und $\int_0^1 x^3 \exp(-x^2)\,dx$.