Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 10

Analysis II SS 2013

(Abgabe: 18.06.2013)

Aufgabe 1
(i) (Gedämpfte Schwingungen) Bestimmen Sie die reellen Lösungen $\varphi(t)$ von $y'' + 2\mu y' + \omega_0^2 y = 0$, $\mu, \omega_0 \in \mathbb{R}$, $\mu, \omega_0 > 0$ und diskutieren Sie ihr Verhalten für $t \to \infty$ in Abhängigkeit von μ und ω_0. *Hinweis:* Was sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms?
(ii) Lösen Sie die inhomogene Gleichung $y'' + 2y' + y = \sin x \exp(x)$.

Aufgabe 2
(i) Wir betrachten die Gleichung $\sum_{j=0}^{n} a_j(x) y^{(j)}(x) = 0$, wobei $a_0, \ldots, a_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegebene Funktionen sind. Sei $t \mapsto \varphi(t)$ eine Lösung der Gleichung. Finden Sie $b_1, \ldots, b_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass gilt: $\psi(t) = z(t)\varphi(t)$ ist genau dann eine weitere Lösung, wenn z die Gleichung $\sum_{j=1}^{n} b_j(x) z^{(j)}(x) = 0$ erfüllt.

(ii) Lösen Sie die Gleichung $x^2 y'' - xy' + y = 0$. *Hinweis:* y(x)=x ist eine Lösung. Benutzen Sie (i), um eine weitere zu finden.

Aufgabe 3
Wir betrachten die Gleichung $x^2(1-x)y'' + 2x(2-x)y' + 2(1+x)y = 0$.
(i) Finden Sie eine Lösung der Form $t \mapsto t^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.
(ii) Benutzen Sie die Methode aus Aufgabe 2(i), um eine weitere Lösung zu finden.

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass das angegebene Paar (X, d) die Axiome eines metrischen Raums efüllt.
(i) X ist die Menge aller komplexer Folgen $(a_n) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ und

$$d((a_n), (b_n)) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{|a_n - b_n|}{1 + |a_n - b_n|}.$$

(ii) $X = \mathbb{R}$ und

$$d(a, b) = \begin{cases} d_+(a, b) & \text{falls } ab \geq 0, \\ d_+(a, 0) + d_+(0, b) & \text{für } ab < 0, \end{cases}$$

wo

$$d_+(a, b) = \sqrt{2} \frac{|a - b|}{(1 + |a|)(1 + |b|)}.$$

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 11.06-13.06 besprochen werden:

- Erklären Sie, wie man die Methode der Variation der Konstanten im Fall von inhomogenen linearen Gleichungen höherer Ordnung benutzt.

  Lösen Sie die Gleichung $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

- Wir betrachten ein lineares System erster Ordnung: $Y' = A(x)Y$, $A : \mathbb{R} \to M(n, \mathbb{C})$. Sei $t \mapsto \varphi(t)$ eine Lösung. Setze $\psi(t) = c(t)\varphi(t) + \mathbf{z}(t)$, wobei

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \; c'(t)\varphi_1(t) = \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(t) z_j(t).$$

  Zeigen Sie: Falls $z_2, \ldots, z_n$ das System aus (n-1) Gleichungen

$$z_k' = \sum_{j=2}^{n} (a_{kj} - \frac{\varphi_k}{\varphi_1} a_{1j}) z_j, k = 2, \ldots, n$$

  lösen, dann ist ψ eine zweite Lösung von $Y' = A(x)Y$.

- Lösen Sie das System

$$y_1' = \frac{1}{x} y_1 - y_2,$$
$$y_2' = \frac{1}{x^2} y_1 + \frac{2}{x} y_2.$$

  Hinweis: $\varphi(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$ ist eine Lösung. Benutzen Sie die oben angegebene Methode, um eine weitere Lösung zu finden.

- Zeigen Sie, dass durch $d(x, y) := \arctan |x - y|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ gegeben ist.

  Sei $p > 1$ eine Primzahl. Wir schreiben jedes $x \in \mathbb{Q}$ mit $x \neq 0$ in der Form $|q| = p^k \frac{m}{n}$, wo $m, n \in \mathbb{Z}$ nicht teilbar sind durch p. Wir setzen $|x|_p := p^{-k}$ und $|0|_p := 0$. Zeigen Sie, dass durch $d(x, y) := |x - y|_p$ eine Metrik auf $\mathbb{Q}$ definiert ist.