Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 11

Analysis II SS 2013

(Abgabe: 25.06.2013)

Aufgabe 1
(i) Seien d_1 und d_2 zwei Metriken auf einer Menge X. Zeigen Sie, dass $d(x,y) := \max(d_1(x,y), d_2(x,y))$ ebenfalls eine Metrik auf X ist.
(ii) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass $d(x,y) := \min(d_1(x,y), d_2(x,y))$ im Allgemeinen *keine* Metrik auf X definiert. *Hinweis:* Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$ mit $d_j(x,y) = \sqrt{a_j(y_1-x_1)^2 + b_j(y_2-x_2)^2}$ für geeignet gewählte $a_j, b_j > 0$, $j = 1, 2$.

Aufgabe 2
(i) Sei (X,d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie die Identität

$$\partial M = \{x \in X : \text{ Es existiert } (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X, \text{ s. d. } \lim_{k\to\infty} x_k = x,$$

$$x_{2k} \in M \text{ und } x_{2k+1} \in X \setminus M \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) Zeigen Sie für alle Teilmengen $M, N \subset \mathbb{R}$:

$$\overline{M \times N} = \overline{M} \times \overline{N} \text{ und } \partial(M \times N) = (\partial M \times \overline{N}) \cup (\overline{M} \times \partial N),$$

wobei $\overline{M \times N}$ bzw. $\partial(M \times N)$ der Abschluss bzw. der Rand von $M \times N$ bzgl. der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 3
Bestimmen Sie in den folgenden Fällen den Rand ∂M und den Abschluss $\overline{M}$ der Teilmenge M des metrischen Raums (X,d).
(i) X - eine Menge mit der Metrik d, für die $d(x,y) = 1$ gilt für alle $x \neq y$, und $M \subset X$ beliebig.
(ii) $X = \mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik und

$$M = \{\begin{pmatrix} tq \\ (1-t)q \end{pmatrix}, \text{ wo } q \in \mathbb{Q} \cap (0,\infty) \text{ und } t \in (0,1)\}.$$

Aufgabe 4
(i) Sei (X,d) ein metrischer Raum und bezeichne mit $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Seien $I, J : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definiert durch

$$I(M) = \overline{\overset{\circ}{M}} \text{ und } J(M) = \overset{\circ}{\overline{M}}.$$

Zeigen Sie die Identitäten $I \circ I = I$ und $J \circ J = J$.
(ii) Wir betrachten auf $\mathcal{P}(X)$ die Operationen $M \mapsto \overset{\circ}{M}$ und $M \mapsto \overline{M}$. Zeigen Sie, dass aus einer gegebenen Teilmenge M durch Hintereinanderausführung dieser Operationen höchstens sechs voneinander und von M verschiedene Mengen hervorgehen können. Finden Sie ein Beispiel für $M \subset \mathbb{R}$, so dass diese Zahl erreicht wird.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 18.06-20.06 besprochen werden:

- Begründen Sie, dass durch $\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ gegeben ist und finden Sie Konstanten c, C, so dass $c\|x\|_1 \leq \|x\| \leq C\|x\|_1$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Hier ist $\|\cdot\|$ die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$.

- Sei M Teilmenge eines metrischen Raums. Zeigen Sie die Identitäten

$$\overset{\circ}{M} = \{x \in M : \exists r > 0 \text{ s. d. } B(x,r) \subset M\},$$

$$\overline{M} = \{x \in X : \forall r > 0 \text{ gilt } B(x,r) \cap M \neq \emptyset\}$$

  und

$$\partial M = \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}.$$

- Zeigen Sie für alle Teilmengen eines metrischen Raums: Der Abschluss vom Abschluss einer Menge ist der Abschluss der Menge, das Innere vom Inneren der Menge ist das Innere der Menge und der Rand vom Rand vom Rand der Menge ist der Rand vom Rand der Menge (d. h. $\partial(\partial(\partial M)) = \partial(\partial M)$). Geben Sie ein Beispiel einer Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ mit $\partial(\partial M) \neq \partial M$.

- Seien wieder A, B Teilmengen eines metrischen Raums. Zeigen Sie, dass $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$ gilt. Geben Sie ein Beispiel für $\partial(A \cup B) \neq \partial A \cup \partial B$.