Musterlösung Übungsblatt 11

Analysis II SS 2013

Aufgabe 1

(i) Es gilt für alle $x, y, z \in X$:

- Aus $d_1(y,x) = d_1(x,y)$ und $d_2(y,x) = d_2(y,x)$ folgt $d(y,x) = \max(d_1(y,x), d_2(y,x)) = \max(d_1(x,y), d_2(x,y)) = d(x,y)$.
- Da $d_1(x,y) \geq 0$ und $d_2(x,y) \geq 0$, gilt $d(x,y) = \max(d_1(x,y), d_2(x,y)) \geq 0$. Weiterhin folgen aus $d(x,y) = \max(d_1(x,y), d_1(x,y)) = 0$ die Gleichheiten $d_1(x,y) = d_2(x,y) = 0$ und daraus $x = y$.
- Aus $d(x,y) = \max(d_1(x,y), d_2(x,y)) \geq d_1(x,y)$ und $d(y,z) = \max(d_1(y,z), d_2(y,z)) \geq d_1(y,z)$ folgt $d(x,y) + d(y,z) \geq d_1(x,y) + d_1(y,z) \geq d_1(x,z)$. Analog ergibt sich die Ungleichung $d(x,y) + d(y,z) \geq d_2(x,z)$ und daraus insgesamt

$$d(x,y) + d(y,z) \geq \max(d_1(x,z), d_2(x,z)) = d(x,z).$$

(ii) Wir betrachten auf $\mathbb{R}^2$ die Metriken

$$d_1(x,y) = \sqrt{8(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

und

$$d_2(x,y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + 8(y_2 - x_2)^2}.$$

Dass d_1 und d_2 die Axiome einer Metrik erfüllen, folgt analog wie im Fall der euklidischen Metrik. Wir zeigen jetzt, dass $d(x,y) = \min(d_1(x,y), d_2(x,y))$ nicht die Dreiecksungleichung erfüllt.

Betrachte dazu $x = (0,0)$, $y = (1,0)$ und $z = (1,1)$. Aus $d_1(x,y) = d_2(y,z) = \sqrt{8}$ und $d_2(x,y) = d_1(y,z) = 1$ folgt $d(x,y) = d(y,z) = 1$. Andererseits ist $d_1(x,z) = d_2(x,z) = 3$ und damit $d(x,z) = 3$. Es folgt $d(x,y) + d(y,z) = 2 < 3 = d(x,z)$.

Aufgabe 2

(i) Nach Definition ist

$$\partial M = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt } B(x,\varepsilon) \cap M \neq \emptyset \text{ und } B(x,\varepsilon) \cap (X \setminus M) \neq \emptyset\}.$$

Insbesondere folgt aus $x \in \partial M$, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ Punkte $x_{2k} \in B(x, \frac{1}{k+1}) \cap M$ und $x_{2k+1} \in B(x, \frac{1}{k+1}) \cap (X \setminus M)$ existieren. Die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert wegen $d(x_k, x) \leq \frac{2}{k+1}$ gegen x.

Sei andererseits $x \in X$ gegeben mit der Eigenschaft, dass eine Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ existiert mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, $x_{2k} \in M$ und $x_{2k+1} \in X \setminus M$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $k \geq N$ gilt: $x_{2k}, x_{2k+1} \in B(x,\varepsilon)$. Hieraus folgt $B(x,\varepsilon) \cap M \neq \emptyset$ und $B(x,\varepsilon) \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$ und damit nach Definition $x \in \partial M$.

(ii) Wir zeigen zunächst die Identität

$$\partial(M \times N) = (\partial M \times \overline{N}) \cup (\overline{M} \times \partial N).$$

Beweis. Es gilt $\overline{M} = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt } B(x,\varepsilon) \cap M \neq \emptyset\}$ (siehe Rückseite des Aufgabenblattes). Daraus folgt

$$(\partial M \times \overline{N}) \cup (\overline{M} \times \partial N) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \text{ gilt } B(x,\varepsilon_1) \cap M \neq \emptyset, B(x,\varepsilon_1) \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$$

$$\text{und } B(y,\varepsilon_2) \cap N \neq \emptyset\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \text{ gilt } B(x,\varepsilon_1) \cap M \neq \emptyset, B(y,\varepsilon_2) \cap N \neq \emptyset$$

$$\text{und } B(y,\varepsilon_2) \cap (X \setminus N) \neq \emptyset\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \text{ gilt } (B(x,\varepsilon_1) \times B(y,\varepsilon_2)) \cap (M \times N) \neq \emptyset$$

$$\text{und } (B(x,\varepsilon_1) \times B(y,\varepsilon_2)) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus (M \times N)) \neq \emptyset\}.$$

Andererseits ist wegen der Inklusionen

$$B((x,y), \min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)) \subset B(x,\varepsilon_1) \times B(y,\varepsilon_2) \subset B((x,y), \sqrt{2}\max(\varepsilon_1,\varepsilon_2))$$

die Bedingung $((B(x,\varepsilon_1) \times B(y,\varepsilon_2)) \cap (M \times N) \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0)$ äquivalent zur Bedingung $(B((x,y),\varepsilon) \cap (M \times N) \neq \emptyset$ für jedes $\varepsilon > 0)$. Es ergibt sich

$$(\partial M \times \overline{N}) \cup (\overline{M} \times \partial N) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \text{ gilt } (B(x,\varepsilon_1) \times B(y,\varepsilon_2)) \cap (M \times N) \neq \emptyset$$

$$\text{und } (B(x,\varepsilon_1) \times B(y,\varepsilon_2)) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus (M \times N)) \neq \emptyset\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt } B((x,y),\varepsilon) \cap (M \times N) \neq \emptyset$$

$$\text{und } B((x,y),\varepsilon) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus (M \times N) \neq \emptyset\} = \partial(M \times N).$$

□

Daraus ergibt sich

$$\overline{M \times N} = (M \times N) \cup \partial(M \times N) = (M \times N) \cup (\partial M \times \overline{N}) \cup (\overline{M} \times \partial N)$$

$$= (M \times N) \cup (\partial M \times N) \cup (\partial M \times \partial N) \cup (\overline{M} \times \partial N) = (\overline{M} \times N) \cup (\overline{M} \times \partial N) = \overline{M} \times \overline{N},$$

wobei wir die Inklusion $\partial M \times \partial N \subset \overline{M} \times \partial N$ benutzt haben.

Aufgabe 3

(i) Sei $M \subset X$ beliebig. Da $d(x,y) = 1$ ist für $x \neq y$, haben wir für jedes $x \in X$ die Identität $B(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$. Insbesondere gilt $B(x, \frac{1}{2}) \cap (X \setminus M) = \emptyset$ für $x \in M$ und $(x, \frac{1}{2}) \cap (X \setminus M) = \emptyset$ für $x \in X \setminus M$. Es folgt $\partial M = \emptyset$ und daraus $\overline{M} = M$.

(ii) Es gilt

$$M = \{(x,y) \in (0,\infty) \times (0,\infty) : x + y \in \mathbb{Q}\}.$$

In der Tat, falls $(x,y) = (tq, (1-t)q)$ gilt mit $t \in (0,1)$ und $q \in \mathbb{Q}$, dann ist $x \geq 0, y \geq 0$ und $x + y = q \in \mathbb{Q}$. Umgekehrt gilt für $x + y = q \in \mathbb{Q}$ mit $t := \frac{x}{x+y}$ die Gleichheit $(x,y) = (tq, (1-t)q)$.

Wir behaupten, dass $\partial M = [0,\infty) \times [0,\infty)$ gilt - hieraus wird dann wegen $M \subset [0,\infty) \times [0,\infty)$ die Gleichheit $\overline{M} = [0,\infty) \times [0,\infty)$ folgen. Da M in der abgeschlossenen Teilmenge $[0,\infty) \times [0,\infty)$ enthalten ist, gilt $\partial M \subset [0,\infty) \times [0,\infty)$. Sei jetzt $(x,y) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$ und sei $\varepsilon > 0$. Da für die Abschlüsse von $\mathbb{Q}$ bzw. von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ gilt:

$$\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R},$$

existieren

$$(x', y') \in ((0,\infty) \times (0,\infty)) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$$

und

$$(x'', y'') \in ((0,\infty) \times (0,\infty)) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

mit

$$|x' - x|, |y' - y|, |x'' - x|, |y'' - y| < \varepsilon/\sqrt{2}.$$

Dann ist $(x', y') \in B((x, y), \varepsilon) \cap M$ und $(x'', y'') \in B((x, y), \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus M)$, also insbesondere $B((x, y), \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$ und $B((x, y), \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus M) \neq \emptyset$. Es folgt $(x, y) \in \partial M$ und, da $(x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ beliebig war, $[0, \infty) \times [0, \infty) \subset \partial M$.

Aufgabe 4

(i) Wir benutzen

a) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$,

b) $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$,

c) Der Abschluss des Abschlusses ist gleich dem Abschluss und

d) Das Innere vom Inneren ist gleich dem Inneren.

Wir zeigen jetzt die Identität $I(I(M)) = M$. Wir haben die Inklusion $A := I(\overset{\circ}{M}) \subset I(M) =: B$. Anwendung von a) ergibt $\overline{A} \subset \overline{B}$. Nach Definition ist $\overline{A} = I(I(M))$ und andererseits ist wegen c) $\overline{B} = B = I(M)$. Es folgt $I(I(M)) \subset I(M)$. Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, wenden wir b) an auf

$$A := \overset{\circ}{M} \subset I(M) =: B.$$

Wegen d) ist

$$\overset{\circ}{A} = A$$

und es folgt

$$A \subset \overset{\circ}{B}.$$

Durch Anwendung von a) folgt

$$\overline{A} \subset \overline{\overset{\circ}{B}},$$

andererseits ist nach Definition $\overline{A} = I(M)$ und $\overline{\overset{\circ}{B}} = I(I(M))$. Dies beendet den Beweis der Identität $I(I(M)) = M$.

Wir zeigen jetzt die Gleichheit $J(J(M)) = M$. Anwendung von a) auf $A := J(M) \subset \overline{M} =: B$ ergibt $\overline{J(M)} \subset \overline{B}$. Nach c) ist $\overline{B} = B$ und mithilfe von b) folgt $J(J(M)) \subset J(M)$. Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, wenden wir b) an auf $A := J(M) \subset \overline{J(M)} =: B$. Wir erhalten

$$\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B} = J(J(M)),$$

andererseits ist wegen d)

$$\overset{\circ}{A} = A = J(M).$$

Daraus folgt $J(M) \subset J((J(M))$ und dies beendet den Beweis.

(ii) Wir bezeichnen mit $O(M)$ die Menge, die als Elemente die paarweise verschiedenen unter den Mengen

$$M, \overline{M}, \overset{\circ}{M}, I(M), J(M), I(\overset{\circ}{M}) \text{ und } \overline{J(M)}$$

hat. Nach Definition hat $O(M)$ höchstens sieben Elemente und wir behaupten, dass $O(M)$ abgeschlossen ist unter Bildung des Abschlusses und des Inneren, d. h. dass für jedes $A \in O(M)$ gilt:

$$\overline{A} \in O(M) \text{ und } \overset{\circ}{A} \in O(M).$$

In der Tat folgt dies für $A = M$, $A = \overline{M}$, $A = \overset{\circ}{M}$, $A = I(M)$ und $A = J(M)$ unmittelbar aus der Definition von $O(M)$ und (i)c) sowie (i)d). Für

$$A = I(\overset{\circ}{M})$$

bzw.

$$A = \overline{J(M)}$$

benutzen wir (i)c), (i)d) und die Identitäten $I(I(M)) = I(M)$ bzw. $J(J(M)) = J(M)$.

Wir geben jetzt ein Beispiel für $M \subset \mathbb{R}$, so dass $O(M)$ genau sieben Elemente hat. Das Beispiel ist

$$M = ((-\infty, 0) \cap \mathbb{Q}) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup \{3\}.$$

Wir haben

- $\overline{M} = (-\infty, 2] \cup \{3\}$,
- $\overset{\circ}{M} = (0, 1) \cup (1, 2)$,
- $I(M) = [0, 2]$,
- $J(M) = (-\infty, 2)$,
- $I(\overset{\circ}{M}) = (0, 2)$ und
- $\overline{J(M)} = (-\infty, 2]$.