Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 12

Analysis II SS 2013

(Abgabe: 02.07.2013)

Aufgabe 1
Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen heisst *offen* (bzw. *abgeschlossen*), falls $f(U) \subset Y$ offen (bzw. abgeschlossen) ist für jede offene (bzw. abgeschlossene) Teilmenge $U \subset X$.
(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, 0)$ abgeschlossen, aber nicht offen ist.
(ii) Beweisen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ offen, aber nicht abgeschlossen ist. *Hinweis:* Um zu zeigen, dass die Abbildung nicht abgeschlossen ist, kann man zum Beispiel Graphen geeigneter Funktionen betrachten.

Aufgabe 2
Sei (X, d_X) ein metrischer Raum.
(i) Zeigen Sie, dass durch $d_{X\times X}((x, x'), (y, y')) := d_X(x, y) + d_X(x', y')$ eine Metrik auf $X \times X$ definiert ist und dass die Abbildung $X \times X \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto d_X(x, y)$ stetig ist bezüglich dieser Metrik.
(ii) Zeigen Sie, dass der Graph $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times X$ einer stetigen Abbildung $f : X \to X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 3
(i) Sei $\Phi : X \to Y$ eine stetige bijektive Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. Zeigen Sie: Falls X kompakt ist, dann ist Φ ein Homöomorphismus.

Wir betrachten jetzt die Teilmengen $[-1, 1] \times [-1, 1]$ und $\overline{D}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ von $\mathbb{R}^2$, jeweils mit der durch die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$ induzierten Metrik.
(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \overline{D}^2$, $(x, y) \mapsto (r(x, y)x, r(x, y)y)$ mit

$$r(x, y) = \begin{cases} \frac{\max(|x|,|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1 & \text{falls } x = y = 0 \end{cases}$$

stetig und bijektiv ist. Schlussfolgern Sie mithilfe von (i), dass Φ ein Homöomorphismus ist.
(iii) Zeigen Sie, dass $[-1, 1] \times [-1, 1] \setminus \{(1, 1)\}$ und $[0, 1] \times [0, 1] \setminus \{(1, 0)\}$, wieder aufgefasst als metrische Räume mit der von der euklidischen Metrik von $\mathbb{R}^2$ induzierten Metrik, homöomorph sind. *Hinweis:* Betrachten Sie die Bilder dieser beiden Teilmengen von $[-1, 1] \times [-1, 1]$ unter der Abbildung Φ.

Aufgabe 4
Sei $D \subset \mathbb{R}$ und sei $V = \{f : D \to \mathbb{R} |\ f \text{ ist beschränkt und stetig}\}$. Zeigen Sie, dass V mit der durch die Norm $\|f\|_D := \sup\{|f(x)| : x \in D\}$ induzierten Metrik ein vollständiger metrischer Raum ist.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 25.06-27.06 besprochen werden:

- Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Wir betrachten die Intervalle $(a, b), [a, b] \subset \mathbb{R}$, aufgefasst als metrische Räume mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik. Zeigen Sie, dass die Inklusionsabbildung $(a, b) \hookrightarrow \mathbb{R}$ offen, aber nicht abgeschlossen und dass die Inklusionsabbildung $[a, b] \hookrightarrow \mathbb{R}$ abgeschlossen, aber nicht offen ist (siehe Aufgabe 1 auf der Vorderseite).

- Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass es auf X eine Metrik d' gibt mit den folgenden beiden Eigenschaften: a) Eine Abbildung $f : X \to Y$ in einen metrischen Raum Y ist genau dann stetig bezüglich d, wenn sie stetig ist bezüglich d' und b) $\mathrm{diam}_{d'}(X) < \infty$.

  Hinweis: Betrachten Sie $d'(x, y) := d(x, y)/(1 + d(x, y))$.

- Konstruieren Sie einen Homöomorphismus zwischen $\mathbb{R}$ und dem Intervall $(-1, 1)$.

  Wiederholen Sie den Begriff eines kompakten metrischen Raums. Beweisen Sie, dass $(-1, 1)$ und $[-1, 1]$, aufgefasst als metrische Räume mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik, nicht homöomorph sind.

- Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Entscheiden Sie, ob $V = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} |\ f \text{ ist stetig}\}$ mit der durch die Norm $\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx$ induzierten Metrik ein vollständiger metrischer Raum ist.

  Hinweis: Finden Sie eine Folge von stetigen Funktionen $[a, b] \to \mathbb{R}$, die eine Cauchy-Folge ist bezüglich $\| \cdot \|_1$, die aber nicht in V konvergieren kann.