Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

# Übungsblatt 13

## Analysis II SS 2013

**(Abgabe: 09.07.2013)**

**Aufgabe 1**
(i) Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass für jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ der metrische Raum $(K, d|_{K\times K})$ vollständig ist.
(ii) Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ genau dann kompakt ist, wenn $K \times K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt ist. *Hinweis:* Aufgabe 1 auf der Rückseite.

**Aufgabe 2**
Bestimmen Sie dort, wo sie existieren, die Richtungsableitungen der folgenden Funktionen:
(i) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ mit

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^\alpha,$$

wobei $\alpha > 0$.
(ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 \ln(x_1^2 + x_2^2) & \text{falls } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } x_1 = x_2 = 0. \end{cases}$$

**Aufgabe 3**
Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } x_1 = x_2 = 0. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass die Richtungsableitung $df_x(a)$ von $f$ im Punkt $x = (0, 0)$ für jedes $a \in \mathbb{R}^2$, $a \neq (0, 0)$ existiert und berechnen Sie diese.
(ii) Zeigen Sie, dass $f$ nicht stetig ist im Punkt $(0, 0)$. *Hinweis:* Betrachten Sie die Folge $(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})_{n\geq 1}$.

**Aufgabe 4**
Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der folgenden Abbildungen:
(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

(ii) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $h = g \circ f$, wo $f$ die Abbildung aus (i) ist und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung

$$g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1 x_2).$$

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 02.07-04.07 besprochen werden:

- Zeigen Sie: Ist für eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ die Teilmenge $K \times K$ von $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen bezüglich der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^2$, dann ist $K$ abgeschlossen. *Hinweis:* Zeigen Sie, dass $\mathbb{R} \setminus K$ offen ist.

- Wiederholen Sie den Begriff der partiellen Ableitungen einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

  Bestimmen Sie dort, wo sie existieren, die partiellen Ableitungen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_2\sqrt{2x_1^2 + x_2^2}$.

- Wiederholen Sie den Begriff der Richtungsableitung.

  Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

  $$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{falls } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

  stetig im Punkt $(x_1, x_2) = (0, 0)$? Welche Richtungsableitungen existieren in diesem Punkt?

- Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

  $$f(r, \varphi, \theta) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta).$$