Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 2

Analysis II SS 2013

(Abgabe: 23.04.2013)

Aufgabe 1
(i) Beweisen Sie für $\sinh t := (\exp t - \exp(-t))/2$, $\cosh t := (\exp t + \exp(-t))/2$ und $u := \tanh(t/2) = \sinh(t/2)/\cosh(t/2)$ die Formeln

$$\cosh t = \frac{1+u^2}{1-u^2} \text{ und } \sinh t = \frac{2u}{1-u^2}.$$

Benutzen Sie die Substitution $u = \tanh(t/2)$, um für $x > 1$ das Integral $f(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sinh t}$ auszurechnen.

(ii) Berechnen Sie die Kurvenlänge des Graphen der Funktion $f(x)$ für $x \in [1, 2]$.

Aufgabe 2
(i) Bestimmen Sie, welche der folgenden beiden uneigentlichen Integrale konvergieren: $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x)\, dx$ bzw. $\int_1^{\infty} \sin(x^2)\, dx$.

(ii) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+\exp(x)}}$. *Hinweis:* Benutzen Sie die Substitution $\sqrt{1+\exp(x)} = t$.

Aufgabe 3
(i) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} \exp(-t)\, dt$ für jedes $x > 0$ konvergiert und die Gleichungen $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ und $\Gamma(n) = (n-1)!$ für alle $x, n > 0$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ erfüllt sind.

(ii) Bestimmen Sie, für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} t^{\alpha} \exp(-t^{\beta})\, dt$ konvergiert und berechnen Sie es gegebenenfalls in Termen von $\Gamma(x)$.

Aufgabe 4
(i) Beweisen Sie das folgende Integral-Vergleichskriterium für Reihen: Ist $f\colon [1, \infty) \to [0, \infty)$ eine monoton fallende Funktion, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ konvergent ist.

(ii) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass auf die Voraussetzung der Monotonie nicht verzichtet werden kann.

(iii) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ in Abhängigkeit von $\alpha \geq 0$.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 15.04-18.04 besprochen werden:

- Berechnen Sie die Kurvenlänge des Graphen der Funktion $f(x) = x^2/2$ auf dem Intervall $(-1, 1)$.
- Berechnen Sie $\int_2^3 \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx$ mithilfe der Substitution $t = x + \frac{1}{x}$

  Hinweis: Benutzen Sie $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ und $\frac{1}{t^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}})$.
- Formulieren Sie Kriterien für die Konvergenz eines uneigentlichen Integrals.

  Entscheiden Sie, ob die uneigentlichen Integrale $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$ und $\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2)\,dx$ konvergent sind.
- Berechnen Sie $\int_0^\infty \exp(-\alpha x)\cos(\beta x)\,dx$ und $\int_0^\infty \exp(-\alpha x)\sin(\beta x)\,dx$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

  Berechnen Sie $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^3}$.
- Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ für alle $x, y > 0$ konvergent ist und die Gleichung $xB(x, y) = (x + y)B(x + 1, y)$ erfüllt ist.

  Hinweis: Benutzen Sie partielle Integration.
- Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{\ln n}{n^2}$ konvergent ist. Sie können das Ergebnis von Aufgabe 4(i) auf der Forderseite als bekannt voraussetzen.