Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 3

Analysis II SS 2013

(Abgabe: 30.04.2013)

Aufgabe 1
(i) Berechnen Sie für jedes $n \geq 0$ das bestimmte Integral

$$A_n = \int_0^\pi \sin^n x \, dx.$$

Hinweis: Benutzen Sie partielle Integration, um eine Rekursionsformel zu finden, die A_{n+2} in Termen von A_n ausdrückt.
(ii) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = 1$ gilt und schlussfolgern Sie daraus die folgende *Wallis'sche Produktformel*:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}.$$

Aufgabe 2
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 > 0$.
(i) Finden Sie $A, \theta \in \mathbb{R}$, so dass $a \cos x + b \sin x = A \sin(x + \theta)$ gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$.
(ii) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$.

Aufgabe 3
(i) Berechnen Sie mithilfe einer Partialbruchzerlegung das unbestimmte Integral $\int \frac{dx}{x^3+1}$.
(ii) Benutzen Sie die Substitution $u = \tan(x/2)$, um das unbestimmte Integral $\int \frac{dx}{\sin x + 2}$ auszurechnen.

Aufgabe 4
(i) Es seien für $n \geq 0$ die Tschebyschew-Polynome T_n definiert durch $T_0 = 1$, $T_1(x) = x$ und

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \text{ für } n \geq 2.$$

Beweisen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Formel

$$\cos(nx) = T_n(\cos x).$$

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-1}^{1} T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

gilt für $n \neq m$.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 22.04-25.04 besprochen werden:

- Finden Sie mithilfe von partieller Ingetration eine Rekursionsformel für das Integral $\int_0^x \tan^n t\, dt$, $n \geq 0$, $-\pi/2 < x < \pi/2$. *Hinweis:* Setzen Sie $f'(t) = \sin t / \cos^n t$ und $g(t) = \sin^{n-1} t$.

- Zeigen Sie, dass $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ gilt, indem Sie die folgenden Beweisschritte ausführen:

  (i) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für $0 < t < 2\pi$ die Formel $\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{2}$.

  (ii) Schlussfolgern Sie aus (i) für $0 < x < 2\pi$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \int_\pi^x \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(t/2)}\, dt - \frac{x-\pi}{2}$.

  (iii) Zeigen Sie mithilfe partieller Integration, dass $\lim_{n\to\infty} \int_\pi^x \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(t/2)}\, dt = 0$ gilt.

  (iv) Folgern Sie die Formel $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}$ und werten Sie diese aus für $x = \pi/2$.

- Beweisen Sie $\frac{d \arctan}{dx}(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $-\pi/2 < x < \pi/2$.

  Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ in Abhängigkeit von $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

- Wiederholen Sie die Idee zur Berechnung von Integralen rationaler Funktionen mithilfe von Partialbruchzerlegungen.

  Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$.