Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 4

Analysis II SS 2013

(Abgabe: 07.05.2013)

Aufgabe 1
Bezeichne für $x \in \mathbb{R}$ mit $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl k mit $k \leq x$.

(i) Sei $\in \mathbb{N}$ und sei $f\colon [0,n] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Beweisen Sie die folgende *Eulersche Summenformel*:

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = f(0) + \int_0^n f(x)\,dx + \int_0^n (x - \lfloor x \rfloor) f'(x)\,dx.$$

(ii) Zeigen Sie mithilfe von (i), dass die Folge $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ mit $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ konvergent ist.

Aufgabe 2
Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktion:
(i) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$, $0 < x < \pi$.
(ii) $g(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1+t+t^2}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3
Berechnen Sie die Taylorreihenentwicklung im Punkt $x_0 = 0$ der folgenden Funktionen:
(i) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $0 \leq x < 1$.
(ii) $g(x) = \arcsin x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.

Aufgabe 4
Wir betrachten für jedes $x \in [-1,1]$ die Funktion $F(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$.
(i) Geben Sie den Definitionsbereich von F an. Zeigen Sie, dass die Taylorentwicklung von F um $t_0 = 0$ in ihrem Konvergenzbereich die Form $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$ hat, wo $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge von Polynomen ist, die durch $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ und $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$ bestimmt ist. *Hinweis:* Betrachten Sie die Funktion $t \mapsto (1-2xt+t^2)F'(t)$.
(ii) Zeigen Sie, dass die Potenzreihe in (i) für $t \in (-1/3, 1/3)$ absolut konvergent ist.

Bemerkung: Es kann gezeigt werden, dass P_n die in Aufgabe 1.1 eingeführten Legendre-Polynome sind.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 30.04-02.05 besprochen werden:

- Benutzen Sie die Eulersche Summenformel (siehe Aufgabe 1 auf der Forderseite), um zu zeigen:

  a) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n})=\ln 2$.

  b) Mit $a_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}$ und $b_n=\ln\ln n$ gilt $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$.

- Bestimmen Sie $f'(x)$ für $f(x)=\int_0^{\exp(x^2)}\sin t\,dt$, auf zwei verschiedenen Wegen: Durch Berechnung von $f(x)$ einerseits und durch direkte Anwendung des Fundamentalsatzes andererseits.

  Geben Sie die ersten drei Summanden der Taylorreihenentwicklung von f im Punkt $x_0=0$ an.

- Berechnen Sie die Taylorreihenentwicklungen von $f(x)=\frac{1}{1+x}$ und $g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $x>-1$ in $x_0=0$.

- Die Funktion $f(x)=\frac{x}{\exp(x)-1}$, $f(0):=1$ besitzt eine in einer Umgebung von $x_0=0$ konvergente Potenzreihenentwicklung und man definiert die *Bernoulli-Zahlen* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die Formel

$$\frac{x}{\exp(x)-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n.$$

  a) Zeigen Sie $B_0=1$ und $B_1=-1/2$.

  b) Indem Sie die Funktion $x\mapsto\frac{x}{\exp(x)-1}-B_1x$ betrachten, zeigen Sie, dass $B_n=0$ gilt für jedes ungerade $n>1$.

  c) Zeigen Sie, dass die Funktion $F(w,x)=\frac{x\exp(wx)}{\exp(x)-1}$ die Potenzreihenentwicklung $F(w,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(w)}{n!}x^n$ besitzt, wo $B_n(w)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_kw^{n-k}$ das n-te *Bernoulli-Polynom* ist.