Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

# Übungsblatt 6

## Analysis II SS 2013

## (Abgabe: 21.05.2013)

**Aufgabe 1**
Bezeichne für $n \geq 0$ mit $P_n$ das in Blatt 1 Aufgabe 1 eingeführte Legendre-Polynom vom Grad $n$. Bezeichne $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$.

(i) Begründen Sie, dass durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf dem Raum aller stetigen Funktionen $[-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert ist. Weisen Sie nach, dass die Polynome $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die folgende **Eigenschaft L1** haben: Ist $Q : [-1,1] \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad $k \geq 0$, dann gilt $\langle Q, P_n\rangle = 0$ für alle $n > k$.
(ii) Aus der Definition von $P_n$ bzw. aus Aufgabe 2 auf Blatt 1 folgt: Der Leitkoeffizient von $P_n$ ist $(2n)!/(2^n(n!)^2)$ und es gilt $P_n(-x) = \pm P_n(x)$ für alle $n$ und $x$ (**Eigenschaft L2**); weiterhin ist $\langle P_n, P_m\rangle = 2\delta_{nm}/(2n+1)$ (**Eigenschaft L3**). Zeigen Sie, dass die Eigenschaften **L1**, **L2** und **L3** die Legendre-Polynome eindeutig bestimmen.
*Hinweis:* Weisen Sie nach, dass die Rekursionsformel aus Blatt 4, Aufgabe 4(i) erfüllt ist. Schreiben Sie dazu $P_{n+1}(x) = axP_n(x) + bP_n(x) + cP_{n-1}(x) + Q$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\deg Q \leq n-2$ und benutzen Sie L1-L3, um $a, b, c$ und $Q$ zu berechnen.

**Aufgabe 2**
(i) Zeigen Sie für $n \geq 0$: $\int_0^\pi \frac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)}\,dx = \pi/2$.
(ii) Beweisen Sie: Für jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt $\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,dx = 0$.
Indem Sie $f\colon [0,\pi) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin(x/2)} & \text{für } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

bertrachten und (i) anwenden, zeigen Sie die Formel $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

**Aufgabe 3**
Berechnen Sie die Fourierreihenentwicklungen der $2\pi$-periodischen Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
(i) $f(x) = |\sin x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
(ii) $g(x) = |x|$ für $-\pi \leq x \leq \pi$.

**Aufgabe 4**
(i) Berechnen Sie die Fourierreihenentwicklung der $2\pi$-periodischen Funktion $f$ mit $f(x) = \cosh ax$ für $x \in [-\pi, \pi)$, wobei $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
(ii) Benutzen Sie die Parsevalsche Gleichung, um die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$ auszurechnen.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 14.05-16.05 besprochen werden:

- Wiederholen Sie die Definition eines Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf einem Vektorraum $V$.

  Zeigen Sie die allgemeine Form der Besselschen Ungleichung: Sind $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ Elemente von $V$, die der Bedingung $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ genügen, dann gilt für jedes $f \in V$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\langle f, e_k \rangle)^2 \leq \langle f, f \rangle.$$

- Bezeichne für $x \in \mathbb{R}$ und $n \geq 0$: $D_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}$. Zeigen Sie, dass das $n$-te Fourier-Polynom

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \exp(ikx), c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\, dx$$

  einer $2\pi$-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wie folgt berechnet werden kann:

$$S_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(t-x)\, dt.$$

- Berechnen Sie die Fourierreihenentwicklung der $2\pi$-periodischen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x/2$ für $-\pi < x \leq \pi$. Berechnen Sie die durch diese Reihe definierte Funktion.

- Berechnen Sie die Fourierreihenentwicklung der $2\pi$-periodischen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{(\pi-x)^2}{4}$ für $0 \leq x \leq 2\pi$. Zeigen Sie, dass diese Reihe gleichmäßig konvergiert und beweisen Sie mihilfe der Parsevalschen Gleichung die Identität $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.