Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 7

Analysis II SS 2013

(Abgabe: 28.05.2013)

Aufgabe 1
Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:
(i) $y' = \frac{y}{x} + x$, $y(1) = 1$.
(ii) $y' = \exp(y)\sin x$ für die beiden Anfangswerte $y(0) = 0$ bzw. $y(0) = -1$.

Aufgabe 2
(i) Geben Sie die allgemeine Form derjenigen Lösungen y der *Bernoullischen Differentialgleichung*

$$y' = a(x)y + b(x)y^n,$$

für die $y > 0$ gilt. Hierbei ist $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ und $a, b : I \to \mathbb{R}$ sind stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. *Hinweis:* Betrachten Sie $z := y^{1-n}$.
(ii) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{y}{1+x} - (1+x)y^4 = 0,\ y(0) = -1.$$

Aufgabe 3
(i) Finden Sie eine Methode zur Lösung von Differentialgleichungen der Form

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right),$$

wo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist und $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $a\beta - b\alpha \neq 0$. *Hinweis:* Indem Sie $u = x - x_0$ und $v = y - y_0$ mit geeignet gewählten $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ substituieren, führen Sie das Problem auf eine homogene Differentialgleichung zurück.
(ii) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{x + y + 1}{x + 2} + \exp\left(\frac{x + y + 1}{x + 2}\right),\ y(0) = 0.$$

Aufgabe 4
(i) Berechnen Sie für $t \in \mathbb{R}$ die Matrizen $\exp(t\mathrm{A})$ und $\exp(t\mathrm{B})$, wo

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Lösen Sie die Differentialgleichungssysteme $\mathbf{y}' = \mathrm{A}\mathbf{y}$ bzw. $\mathbf{z}' = \mathrm{B}\mathbf{z}$ für die Anfangswerte

$$\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \mathbf{z}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 21.05-23.05 besprochen werden:

- Wiederholen Sie die Methode der Variation der Konstanten zur Lösung von Differentialgleichungen der Form $y' = a(x)y + b(x)$, wo $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind. Finden Sie alle Lösungen der Gleichung
$$y' = -\beta(y + \gamma x - \alpha)$$
mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta, \gamma > 0$.

- Wiederholen Sie die Methode der Trennung der Variablen zur Lösung von Differentialgleichungen der Form $y' = g(x)h(y)$, $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

  Lösen Sie das Anfangswertproblem
$$y' = xy^2, \ y(0) = y_0.$$
  Für welche Werte von y_0 ist die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert?

- Wie löst man homogenen Differentialgleichungen, d. h. Gleichungen der Form $y' = f(\frac{y}{x})$?

  Lösen Sie das Anfangswertproblem
$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}, \ y(1) = 1.$$

- Wir betrachten ein lineares System von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, d. h. ein System der Form $\mathbf{y}' = \mathrm{A}\mathbf{y}$, wo jede Zeile als Differentialgleichung in $\mathbb{C}$ angesehen wird. Begründen Sie, dass die Abbildung $\varphi(t) = \exp(t\mathrm{A})y_0$ eine Lösung ist, die der Anfangsbedingung $\varphi(0) = y_0$ genügt.