Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 8

Analysis II SS 2013

(Abgabe: 04.06.2013)

Aufgabe 1
(i) Ein *Jordan-Block* ist eine Matrix A der Form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\exp(xA)$ für $x \in \mathbb{R}$.
(ii) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\mathbf{y}' = \mathrm{B}\mathbf{y}, \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, wo $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Hinweis: Es gilt $B = S^{-1}AS$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2
(i) Lösen Sie die Differentialgleichungssystem $\mathbf{y}' = \mathrm{A}\mathbf{y}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$. *Hinweis:* Was sind die Eigenwerte und die Eigenvektoren von A?
(ii) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\mathbf{y}' = \mathrm{A}\mathbf{y} + \mathbf{a}$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, wo $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und A die Matrix aus (i) ist.

Aufgabe 3
(i) Bezeichne $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie für jedes $k > 0$ das iterierte Integral

$$A_k(x) = \int_0^x \int_0^{x_k} \dots \int_0^{x_2} A(x_k)A(x_{k-1}) \cdots A(x_1)\, dx_1 \dots dx_k.$$

(ii) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\mathbf{y}' = \mathrm{A}\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, wo $\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $A = A(x)$ wie in (i) ist, auf zwei Wegen: Einmal mithilfe von (i), und einmal durch eine direkte Rechnung.

Aufgabe 4
(i) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix, deren Einträge die Ungleichung $|a_{ij}| < 1/n$ erfüllen. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\log(1 + xA) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{A^k}{k} x^k$$

für $|x| < 1$ konvergent ist.
(ii) Zeigen Sie, dass $Z = \log(1 + xA)$ das Anfangswertproblem $Z' = A \exp(-Z)$, $Z(0) = 0$ löst.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 28.05-30.05 besprochen werden:

- Zeigen Sie für alle Matrizen $A, S \in \mathbb{C}^{n\times n}$, wo S invertierbar ist, die Formel $\exp(B) = S^{-1}\exp(A)S$, wo $B = S^{-1}AS$.

  Welche Beziehung besteht zwischen den Lösungen der Anfangswertprobleme $\mathbf{y}' = B\mathbf{y}, \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ und $\mathbf{z}' = A\mathbf{z}, \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$?

- Lösen Sie das Anfangswertproblem $\mathbf{y}' = \mathrm{A}\mathbf{y} + \mathbf{a}$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, wo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x \\ \sin x \end{pmatrix}$ und $\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Berechnen Sie für $x \in \mathbb{R}$ und $k > 0$ das Integral

$$\int_0^x \int_0^{x_k} \dots \int_0^{x_2} x_k x_{k-1} \cdots x_1 \, dx_1 \dots dx_k.$$

  Benutzen Sie dieses Integral, um die Differentialgleichung $y' = xy$ zu lösen, wo $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ genügt. Bestätigen Sie Ihr Ergebnis durch eine direkte Rechnung.

- Geben Sie ein Beispiel von Matrizen A, B mit $\exp(A)\exp(B) \neq \exp(A + B)$.

  Zeigen Sie für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Gleichung $\exp(A)\exp(-A) = I$, wo I die Identitätsmatrix bezeichnet.