Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 9

Analysis II SS 2013

(Abgabe: 11.06.2013)

Aufgabe 1
Definiere für $A \in M(n, \mathbb{C})$ und $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin Ax := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \text{ und } \cos Ax := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!} x^{2k}.$$

(i) Zeigen Sie, dass beide Reihen für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergieren und die Gleichungen $(\sin Ax)' = A \cos Ax$ und $(\cos Ax)' = -A \sin Ax$ erfüllt sind.
(ii) Zeigen Sie, dass $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ gilt für alle Matrizen A, B mit $AB = BA$.

Aufgabe 2
Sei $A : \mathbb{R} \to M(n, \mathbb{R})$ stetig und sei $Z : \mathbb{R} \to M(n, \mathbb{R})$ Lösung des Anfangswertproblems $Z' = A(x)Z$, $Z(0) = Z_0$.
(i) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt: $Z(x)$ ist genau dann eine invertierbar Matrix, wenn Z_0 invertierbar ist.
(ii) Sei jetzt $Z_0 = I$ die Einheitsmatrix und es gelte $A(x) + A^T(x) = 0$ für jedes x, wo A^T die transponierte Matrix von A bezeichnet. Zeigen Sie, dass $Z(x) \in SO(n)$ gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$, wo

$$SO(n) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) : XX^T = I \text{ und } \det X = 1\}.$$

Aufgabe 3
(i) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y'' - 4y' + 3y = 0$, wo $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(ii) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen von $y'' - 4y' + 3y = 3x^2 + x - 7 + \cos(\sqrt{3}x)$.

Aufgabe 4
(i) Sei $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass für jede Lösung ϕ der Differentialgleichung $y'' = -\frac{dU}{dy}(y)$ die Funktion $x \mapsto \frac{1}{2}(\phi'(x))^2 + U(\phi(x)) =: E(x)$ konstant ist.
Als Beispiel betrachten wir das Anfangswertproblem $y'' = -\frac{\gamma M}{y^2}$, $y(0) = R > 0$, $y'(0) = y_0 > 0$, wo $\gamma > 0$. Zeigen Sie, dass die Lösungen beschränkt sind für

$$y_0 < v_F := \sqrt{2\gamma M/R}$$

und unbeschränkt im Fall $y_0 > v_F$.
(ii) Lösen Sie das Anfangswertproblem aus (i) für $y_0 = v_F$.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 04.06-06.06 besprochen werden:

- Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die in Aufgabe 1 auf der Vorderseite definierten Matrizen $\sin A$, $\sin B$, $\cos A$ und $\cos B$.

  Zeigen Sie, dass in diesem Fall $\sin(A+B) \neq \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ist.

- Zeigen Sie für jede differenzierbare Abbildung $\mathbb{R} \to M(n, \mathbb{C})$, $x \mapsto Z(x)$ mit $Z'(x) = A(x)Z(x)$ die Formel
$$\frac{d}{dx}(\det Z(x)) = \mathrm{Tr}(A(x)) \det Z(x)$$
  (vergleiche VL Satz 158).

  Was ist für $A \in M(n, \mathbb{C})$und $x \in \mathbb{R}$ die Determinante $\det(\exp(Ax))$?

- Bestimmen Sie alle reellen Lösungen von $y'' - 5y' + 6y = 4x \exp(x) - \sin x$.

- Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{1}{4x^2})y = 0$, wo $x \in (0, \infty)$. *Hinweis:* Machen Sie den Ansatz $z = \sqrt{x}y$.