Musterlösung der Scheinklausur vom 04.07.2013 zur Vorlesung Analysis II

Prof. Klaus Mohnke
und Mitarbeiter

1 (i) (4 Punkte) Benutzen Sie den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung, um die erste Ableitung F' der Funktion

$$F(x) = \int_0^{\sin(\exp x)} \cos(\cos t)\, dt$$

zu berechnen.

Lösung: Wir schreiben F als die Komposition $F(x) = G(f(x))$, wo

$$f(x) = \sin(\exp x) \text{ und } G(y) = \int_0^y \cos(\cos t)\, dt.$$

Nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung gilt $G'(y) = \cos(\cos y)$. Durch Anwendung der Kettenregel erhalten wir daraus

$$F'(x) = G'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos(\cos(\sin(\exp x))) \cdot (\sin(\exp x))'$$

$$= \cos(\cos(\sin(\exp x))) \cos(\exp x) \exp x.$$

(ii) (3 Punkte) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int 2x^2 \cos(2x)\, dx.$$

Lösung: Durch partielle Integration (mit $f'(x) = \cos(2x)$ und $g(x) = 2x^2$) ergibt sich:

$$\int 2x^2 \cos(2x)\, dx = x^2 \sin(2x) - \int 2x \sin(2x) dx.$$

Nochmalige partielle Integration (mit $f'(x) = \sin(2x)$ und $g(x) = 2x$) liefert

$$\int 2x^2 \cos(2x)\, dx = x^2 \sin(2x) - \left(-x\cos(2x) - \int (-\cos(2x))\, dx\right)$$

$$= x^2 \sin(2x) + x\cos(2x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + C.$$

(iii) (3 Punkte) Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty x \exp(-x^2)\, dx.$$

Lösung: Wir berechnen zunächst mithilfe der Substitution $x^2 = t$, $\frac{dt}{dx} = 2x$ für $R \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^R x\exp(-x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{R^2} \exp(-t)\, dt = \frac{1}{2}(-\exp(-t))\Big|_0^{R^2} = \frac{1}{2}(1 - \exp(-R^2)).$$

Daraus folgt

$$\int_0^\infty x\exp(-x^2)\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R x\exp(-x^2)\, dx = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}(1 - \exp(-R^2)) = \frac{1}{2}.$$

2

(i) (2 Punkte) Geben Sie die Definition der Koeffizienten a_k bzw. b_k der Fourier-Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

einer gegebenen 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an.

Lösung: Die Fourierkoeffizienten sind für $k \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx\,. \end{aligned}$$

(ii) (2 Punkte) Begründen Sie: Ist f gerade (bzw. ungerade), d. h. gilt $f(-x) = f(x)$ (bzw. $f(-x) = -f(x)$) für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist $b_k = 0$ (bzw. $a_k = 0$) für jedes k.

Lösung: Ist f gerade, dann gilt wegen 2π-Periodizität

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx + \int_{-\pi}^{0} f(x) \sin(kx) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx + \int_0^{\pi} f(-x) \sin(-kx) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx - \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \right) = 0\,, \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass $f(x) = f(-x)$ und $\sin(\cdot)$ eine ungerade Funktion ist. Analog zeigt man, dass $a_k \equiv 0$ für ungerade f gilt.

(iii) (3 Punkte) Berechnen Sie die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ für $-\pi \leq x < \pi$.

Lösung: Die Funktion $f(x) = |x|$ ist gerade, daher wissen wir aus (ii), dass $b_k \equiv 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir berechnen a_k für $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left(\underbrace{\frac{x}{k} \sin(kx) \Big|_0^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi k^2} \cos(kx) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2} \left((-1)^k - 1 \right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ \frac{-4}{\pi k^2} & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Überdies gilt

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi\,.$$

Daher ist die Fourierdarstellung von $f(x) = |x|$ gegeben durch

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)}{\pi (2k+1)^2} \cos((2k+1)x)\,.$$

(iv) (3 Punkte) Wenden Sie die Parsevalsche Gleichung

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx$$

auf die Funktion f aus Teil (iii) an, um die Formel

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

nachzuweisen.

Lösung: Aus der Parsevalschen Gleichung wissen wir

$$\frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 dx = \frac{1}{\pi}\frac{2}{3}\pi^3 = \frac{2}{3}\pi^2\,.$$

Daraus folgt also

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \left(\frac{2}{3}\pi^2 - \frac{1}{2}\pi^2\right)\frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^4}{96}\,,$$

was zu beweisen war.

3 (i) (3 Punkte) Wie lauten die Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(x)y$, wo $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene stetige Funktion ist? Begründen Sie!

Lösung: Für $y \neq 0$ ist

$$y' = a(x)y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = a(x) \Leftrightarrow \int_1^x \frac{y'}{y} dy = \int_1^x a(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \ln(y(x)) - \ln(y(1)) = \int_1^x a(t)dt \Leftrightarrow y(x) = y(1)\exp(\int_1^x a(t)dt).$$

Eine Lösung mit $y(1) = 0$ ist $y \equiv 0$.

Die Lösung $y(x) = y(1)\exp(\int_1^x a(t)dt)$ ist eindeutig: Ist $\tilde{y}$ eine weitere Lösung, dann folgt durch Nachrechnen $\left(\tilde{y}(x)\exp(-\int_1^x a(t)dt)\right)' \equiv 0$ und daraus $\tilde{y} \equiv y$.

(ii) (2 Punkte) Berechnen Sie die Lösungen der Differentialgleichung $y' = -\frac{2y}{x}$.

Lösung: Nach (1) sind die Lösungen gegeben durch

$$y(x) = y(1)\exp(\int_1^x \left(\frac{-2}{t}\right) dt) = y(1)\exp(-2\ln x) = \frac{y(1)}{x^2},$$

wo $y(1) \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

(iii) (3 Punkte) Leiten Sie eine spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{2y}{x} + \frac{1}{2x^2}$$

her. Benutzen und erläutern Sie dazu die Methode der Variation der Konstanten.
Kontrolllösung: $y = \frac{1}{2x}$.

Lösung: Nach (iii) haben die Lösungen der homogenen Gleichung $y' = -\frac{2y}{x}$ die Form

$$y(x) = \frac{C}{x^2}, C \in \mathbb{R}.$$

Um die inhomogene Gleichung $y' = -\frac{2y}{x} + \frac{1}{2x^2}$ zu lösen, machen wir den Ansatz

$$y(x) = \frac{C(x)}{x^2},$$

wo C als Funktion von x gesucht wird.

Mit diesem Ansatz ergibt sich

$$y' = -\frac{2y}{x} + \frac{1}{2x^2} \Leftrightarrow -\frac{2y}{x} + \frac{C'(x)}{x^2} = -\frac{2y}{x} + \frac{1}{2x^2}$$

$$\Leftrightarrow C'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C(x) = \frac{1}{2}x + C_0, C_0 \in \mathbb{R}.$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist also $C(x) = \frac{1}{2}x$, d. h. $y(x) = \frac{1}{2x}$.

(iv) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung aus Teil (iii), die der Anfangsbedingung $y(1) = 0$ genügt.

Lösung: Aus (ii) und (iii) folgt, dass die allgemeine Lösung der Gleichung $y' = -\frac{2y}{x} + \frac{1}{2x^2}$ die Form

$$y(x) = \frac{1}{2x} + \frac{C}{x^2}, C \in \mathbb{R}$$

hat. Es gilt

$$y(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}.$$

Die Lösung, die der Anfangsbedingung $y(1) = 0$ genügt, ist also $y(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2}$.

4 (i) (1 Punkt) Wann heißt eine Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen ein Homöomorphismus?

Lösung: Eine Abbildung Φ zwischen zwei metrischen Raäumen heißt Homöomorphismus, wenn Φ stetig und bijektiv ist und die Umkehrabbildung Φ^{-1} ebenfalls stetig ist.

(ii) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit

$$\Phi(x) = \frac{x}{1 - |x|}$$

ein Homöomorphismus ist.

Lösung: Wir zeigen zunächst, dass Φ bijektiv ist und die Umkehrabbildung von Φ durch

$$\Phi(y) = \frac{y}{1 + |y|}$$

gegeben ist.

Da $\Phi(y) \in (-1,1)$ gilt für jedes $y \in \mathbb{R}$, genügt es zu zeigen, dass für alle $x \in (-1,1)$ und alle $y \in \mathbb{R}$ die Identitäten $\Phi^{-1}(\Phi(x)) = x$ und $\Phi(\Phi^{-1})(y) = y$ gelten. Wir berechnen:

$$\Phi^{-1}(\Phi(x)) = \frac{x/(1-|x|)}{1+|x/(1-|x|)|} = \frac{x}{1-|x|+|x|} = x$$

und

$$\Phi(\Phi^{-1}(y)) = \frac{y/(1+|y|)}{1-|y/(1+|y|)|} = \frac{y}{1+|y|-|y|} = y.$$

Die Stetigkeit von Φ und Φ^{-1} folgt aus den Grenzwertsäetzen für Folgen: Aus $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in (-1,1)$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{1-|x_n|} = \frac{x}{1-|x|} = \Phi(x)$$

und analog für Φ^{-1}.

(iii) (2 Punkte) Konstruieren Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ einen Homöomorphismus zwischen den offenen Intervallen $(-1,1)$ und (a,b).

Lösung Die Abbildung $\Psi : (-1,1) \to (a,b)$ mit

$$\Psi(x) = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$$

ist bijektiv mit Umkehrabbldung

$$\Psi^{-1}(y) = \frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}.$$

Die Stetigkeit von Ψ und Ψ^{-1} folgt aus den Grenzwertsätzen für Folgen.

(iv) (2 Punkte) Wann heißt eine Teilmenge $K \subset X$ eines metrischen Raums kompakt? Was besagt der Satz von Heine-Borel?

Löung: Eine Teilmenge $K \subset X$ eines metrischen Raumes heißt kompakt, wenn gilt: Ist $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Familie von offenen Teilmengen von X, so dass $K \subset \cup_{i\in I} U_i$ gilt, dann existieren endlich viele Indizes $i_1, \ldots, i_N \in I$ mit $K \subset \cup_{k=1}^{N} U_k$.

Der Satz von Heine-Borel besagt, dass eine Teilmenge des euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

(v) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass das offene Intervall $(-1,1)$ und das abgeschlossene Intervall $[-1,1]$ nicht homöomorph zueinander sind.

Lösung: Aus dem Satz von Heine-Borel folgt, dass das abgeschlossene Intervall $[-1,1]$ kompakt, das offene Intervall $(-1,1)$ hingegen nicht kompakt ist. Da jeder Raum, der zu einem kompakten Raum homöomorph ist, ebenfalls kompakt ist, folgt, dass $(-1,1)$ und $[-1,1]$ nicht homöomorphis zueinander sind.