Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Musterlösung Aufgabe 6.2

Analysis III WS 2013/2014

Die Aufgabe lautet:

Es bezeichne $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ die Menge der endlichen und $\overline{\mathcal{F}}^n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ die Menge der unendlichen Figuren in $\mathbb{R}^n$. Definiere $\mathcal{F}^n =: \mathcal{F}_1^n \subset \mathcal{F}_2^n \subset \cdots$ und $\overline{\mathcal{F}}^n =: \overline{\mathcal{F}}_1^n \subset \overline{\mathcal{F}}_2^n \subset \cdots$ sukzessive durch

$$\mathcal{F}_{k+1}^n := \{\cup_{j=0}^N A_j \setminus B_j : A_j, B_j \in \overline{\mathcal{F}}_k^n\} \text{ und } \overline{\mathcal{F}}_{k+1}^n := \{\cup_{j=0}^\infty A_j \setminus B_j : A_j, B_j \in \overline{\mathcal{F}}_k^n\}.$$

(i) Zeigen Sie für alle Mengen A, B, C und D mit $B \subset A$ und $D \subset C$ die Formel

$$(A \setminus B) \setminus (C \setminus D) = A \setminus (B \cup C) \sqcup (A \cap D) \setminus (B \cap D).$$

Schlussfolgern Sie, dass jedes $\mathcal{F}_k^n$, $k > 1$, eine Algebra ist.
(ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q} \in \overline{\mathcal{F}}_2^1$, aber $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \notin \overline{\mathcal{F}}_2^1$ ist.

Lösung
(i) Es gilt

$$\begin{aligned}(A \setminus B) \setminus (C \setminus D) &= \{x : (x \in A \setminus B) \wedge x \notin (C \setminus D)\}\\ &= \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \notin C \vee x \in D)\}\\ &= \{x : (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in D)\}\\ &= A \setminus (B \cup C) \cup (A \cap D) \setminus (B \cap D).\end{aligned}$$

Da $D \subset B$, ist diese Vereinigung disjunkt.

Wir zeigen jetzt mit vollständiger Induktion nach k, dass $\mathcal{F}_k^n$ für jedes $k \geq 1$ ein Ring ist.

Induktionsanfang: Für $k = 1$ ist $\mathcal{F}_1^n = \mathcal{F}^n$ ein Ring (siehe Rückseite von Blatt 5).

Induktionsschritt: Sei für ein $k \geq 1$ bewiesen, dass $\mathcal{F}_k^n$ ein Ring ist. Seien $M, M' \in \mathcal{F}_{k+1}^n$ beliebig. Aus der Definition von $\mathcal{F}_{k+1}^n$ folgt $M \cup M' \in \mathcal{F}_{k+1}^n$. Es bleibt zu zeigen: $M' \setminus M \in \mathcal{F}_{k+1}^n$.

Schreibe $M = \cup_{j=0}^N A_j \setminus B_j$, $M' = \cup_{j=0}^{N'} A'_j \setminus B'_j$ mit $A_j, B_j, A'_j, B'_j \in \overline{\mathcal{F}}_k^n$. Dann ist

$$M' \setminus M = \bigcup_{i=0}^{N} (\bigcup_{j=0}^{N'} (A_i \setminus B_i) \setminus (A'_j \setminus B'_j))$$

$$= \bigcup_{i=0}^{N} (\bigcup_{j=0}^{N'} (A_i \setminus (B_i \cup A'_j) \cup (A_i \cap B'_j) \setminus (B_i \cap B'_j)).$$

Es folgt aus der Definition, dass $\overline{\mathcal{F}}_k^n$ stabil ist unter Vereinigungen. Wir zeigen jetzt, dass $\overline{\mathcal{F}}_k^n$ durchschnittsstabil ist. Das wird den Beweis beenden.

Es gilt $\overline{\mathcal{F}}_k^n = \{\cup_{j=0}^{\infty} M_j : M_j \in \mathcal{F}_k^n\}$. Für $M = \cup_{j=0}^{\infty} M_j$ und $M' = \cup_{j=0}^{\infty} M_j'$ ist

$$M \cap M' = \bigcup_{j=0}^{\infty} (\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i \cap M_j').$$

Da $\mathcal{F}_k^n$ nach Induktionsvoraussetzung ein Ring ist, gilt $M_i \cap M_j' \in \mathcal{F}_k^n$ für alle i, j und daraus $M \cap M' \in \overline{\mathcal{F}}_k^n$.

(ii) Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist und für jedes $x \in \mathcal{R}$ die einelementige Menge $\{x\}$ wegen $\{x\} = [x, \infty) \setminus (\cup_{k=1}^{\infty} [x + \frac{1}{k}, \infty))$ in $\overline{\mathcal{F}}_2$ liegt, folgt

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} \in \overline{\mathcal{F}}_2.$$

Wir zeigen jetzt $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \notin \overline{\mathcal{F}}_2$.

Schritt 1. Wir beweisen: Falls $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \overline{\mathcal{F}}_2$, dann lässt sich $\mathbb{Q}$ schreiben als ein abzählbarer Durchschnitt von unendlichen Figuren.

Beweis: Sei $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \cup_{j=0}^{\infty} A_j \setminus B_j : A_j, B_j \in \overline{\mathcal{F}}$. Da jedes A_j eine abzählbare Vereinigung von halboffenen Intervallen ist, können wir o. B. d. A annehmen, dass $A_j = I_j$ bereits selbst ein halboffenes Intervall ist. Da der Durchschnitt von zwei halboffenen Intervallen wieder ein halboffenes Intervall ist, können wir $B_j \subset A_j$ annehmen. Es folgt

$$\mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \mathbb{R} \setminus (I_j \setminus B_j) = \bigcap_{j=0}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus I_j) \cup B_j$$

und wegen $\mathbb{R} \setminus I_j, B_j \in \overline{\mathcal{F}}$ ist $(\mathbb{R} \setminus I_j) \cup B_j \in \overline{\mathcal{F}}$.

Schritt 2. Wir zeigen, dass $\mathbb{Q}$ sich nicht schreiben lässt als ein abzählbarer Durchschnitt von unendlichen Figuren.

Angenommen, es wäre $\mathbb{Q} = \cap_{j=0}^{\infty} M_j$ mit $M_j \in \overline{\mathcal{F}}$. Sei $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ eine Aufzälung von $\mathbb{Q}$. Da $\mathbb{Q} \subset M_j$ für jedes $j > 0$, existiert $(\varepsilon_{j,k})_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_{>0}$ mit $[q_k, q_k + \varepsilon_{j,k}) \subset M_j$. Wir konstruieren jetzt rekursiv eine Folge $(k(j))_{j=0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ und eine Folge $(\varepsilon(j))_{j=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_{>0}$.

Setze $k(0) := 0$ und sei $0 < \varepsilon(0) < \varepsilon_{0,0}$. Falls $k(j)$ und $\varepsilon(j)$ für ein $j \geq 0$ bereits gegeben sind, dann definiere

$$k(j+1) := \min\{k \in \mathbb{N} : q_{k_j} < q_k < q_{k_j} + \varepsilon_j\}.$$

Wähle anschließend $\varepsilon(j+1) > 0$ mit

$$\varepsilon(j+1) < \min(\frac{\varepsilon(j)}{2}, q_{k(j)} + \varepsilon_j - q_{k(j+1)}, \varepsilon_{j,k(j+1)}).$$

Dann ist $([q_{k(j)}, q_{k(j)} + \varepsilon(j)])_{j=0}^{\infty}$ eine Intervallschachtelung. Es gilt also

$$\cap_{j=0}^{\infty} [q_{k(j)}, q_{k(j)} + \varepsilon(j)] = \{x\}$$

für ein $x \in \mathbb{R}$. Da $[q_{k(j)}, q_{k(j)} + \varepsilon(j)] \in M_j$ für jedes $j \in \mathbb{N}$, ist $x \in \cap_{j=0}^{\infty} M_j$. Wir werden jetzt einen Widerspruch erhalten, indem wir zeigen, dass $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gelten muss.

Angenommen, es wäre $x \in \mathbb{Q}$, etwa $x = q_m$, $m \in \mathbb{N}$. Da $q_{k(j)} > x$ für alle $j \in \mathbb{N}$, ist $m \notin \{k(j) : j \in \mathbb{N}\}$. Also existiert $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $k(j_0) < m < k(j_0 + 1)$. Da aber $q_m \in (q_{k(j_0)}, q_{k(j_0)} + \varepsilon(j_0))$, ist dies ein Widerspruch zur Wahl von $k(j_0 + 1)$. Dies beendet den Beweis.