Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 1

Analysis III WS 2013

(Zusatzblatt, Abgabe: 23.10.2013)

Aufgabe 1
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } x_1 = x_2 = 0. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass f stetig ist und dass die partiellen Ableitungen $\partial_{x_1} f$ und $\partial_{x_2} f$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ exsitieren und beschränkt sind.
(ii) Zeigen Sie, dass f im Punkt $(0,0)$ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 2
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2) \sin \frac{1}{x_1^2+x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } x_1 = x_2 = 0. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist.
(ii) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen $\partial_{x_1} f$ und $\partial_{x_2} f$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ existieren, aber in einer Umgebung von $(0,0)$ unbeschränkt (und damit insbesondere nicht stetig in $(0,0)$) sind.

Aufgabe 3
(i) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Zeigen Sie dass die Funktion

$$f(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp(-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t})$$

die *Wärmeleitungsgleichung* $\frac{\partial f}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ erfüllt.
(ii) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und sei $g : \mathbb{R}^3 \setminus \{(a,b,c)\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x_1, x_2, x_3) = 1/r$, wo $r = \sqrt{(x_1-a)^2 + (x_2-b)^2 + (x_3-c)^2}$. Zeigen Sie, dass g die *Laplace-Gleichung*

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2} = 0$$

erfüllt.

Aufgabe 4
Berechnen Sie die erste Ableitung y' und die zweite Ableitung y'' der Funktionen $y = y(x)$, welche die folgende Gleichung erfüllen:
(i) $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$, $a \in \mathbb{R}$.
(ii) $y - \varepsilon \sin y = x$, $0 < \varepsilon < 1$.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 16.10-21.10 besprochen werden:

- Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

  $$f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 x_2|}$$

  stetig ist und die partiellen Ableitungen $\partial_{x_1} f$ und $\partial_{x_2} f$ im Punkt $(0, 0)$ existieren, aber die Funktion nicht differenzierbar ist in diesem Punkt.

- Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

  $$f(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3}$$

  diffenzierbar im Punkt $(0, 0)$? Existieren die partiellen Ableitungen $\partial_{x_1} f$ und $\partial_{x_2} f$ in diesem Punkt?

- Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

  $$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } x_1 = x_2 = 0. \end{cases}$$

  Zeigen Sie, dass f überall zweimal partiell differenzierbar ist, aber

  $$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(0, 0) \neq \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(0, 0)$$

  ist. Entscheiden Sie, ob f stetig ist im Punkt $(0, 0)$.

- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, sei $c > 0$, $k \in \mathbb{R}^n$ und $\omega := \|k\|$c.

  Zeigen Sie, dass die Funktion $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

  $$F(x, t) = f(\langle k, x \rangle - \omega t)$$

  die *Wellengleichung*

  $$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

  erfüllt.