Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 10 (Zusatzblatt)

Analysis III WS 2013/2014

(Abgabe: 08.01.2014)

Aufgabe 1 (Stereographische Projektion)
(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\sigma_N : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{N\},$$

$$x \mapsto N + \frac{2}{\|(x,0)-N\|^2}((x,0)-N),$$

wo $N := (0,\dots,0,1)$, ein Homöomorphismus ist.
(ii) Berechnen Sie die Übergangsabbildung $\sigma_S^{-1} \circ \sigma_N : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, wo $S = (0,\dots,0,-1)$.

Aufgabe 2
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.
(i) Sei $p \in X$. Zeigen Sie: Falls jede Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-messbar ist und $\int_X f d\mu = f(p)$ gilt, dann ist $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ und μ ist das Dirac-Maß δ_p, gegeben durch

$$\delta_p(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \in A, \\ 0 & \text{falls } p \notin A \end{cases}.$$

(ii) Zeigen Sie umgekehrt: Ist $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ und $\mu = \delta_p$, dann ist jede Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-messbar und $\int_X f d\mu = f(p)$.

Aufgabe 3
(i) Es bezeichne d die euklidische Abstandsfunktion auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, dann ist $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x,B) := \min\{d(x,b) : b \in B\}$ eine wohldefinierte stetige Abbildung.
(ii) Zeigen Sie: Sind $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$ mit K kompakt und U offen, dann existiert eine Funktion $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ mit $f|_K \equiv 1$ und $f|_{\mathbb{R}^n \setminus U} \equiv 0$. Hinweis: Benutzen Sie (i).
(iii) Schlussfolgern Sie mithilfe von Aufgabe 3 auf der Rückseite, Aufgabe 1 auf Blatt 8 und Teil (ii) dieser Aufgabe, dass $C_c^0(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ eine dichte Teilmenge ist.

Aufgabe 4
Seien $A := \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x| \leq 1\}$, $B := \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Entscheiden Sie, für welche $p \in [1, \infty]$ die folgende Funktion im Raum $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ liegt:
(i) $f_a(x) := \frac{\chi_A(x)}{|x|^\alpha}$.
(i) $g_a(x) := \frac{\chi_B(x)}{|x|^\alpha}$.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 18.12-20.12 und am 06.01 besprochen werden:

- Betrachte auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ das Maß $\mu(A) := |A|$. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann μ-integrierbar ist, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ absolut konvergent ist und dass in diesem Fall $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ gilt.

- Was besagen der Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz, das Lemma von Fatou bzw. der Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz?

  Beweisen Sie mithilfe des zuletzt genannten Satzes: Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine aufsteigende Folge von Teilmengen von X mit $\cup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion, die über jedes X_n μ-integrierbar ist mit

  $$\lim_{n\to\infty} \int_{X_n} |f| d\mu < \infty,$$

  dann ist f auf ganz X μ-integrierbar und

  $$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X_n} |f| d\mu.$$

- Wiederholen Sie aus der Vorlesung die Definition und grundlegende Eigenschaften der Räume $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ und $L^p(\mathbb{R}^n)$.

  Zeigen Sie, dass der Unterraum der einfachen messbaren Funtionen dicht ist in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Wie ist der Unterraum $C_c^0(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ definiert?

- Sei $1 \leq p < q < \infty$. Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und gilt $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, dann gilt auch $f \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$.

  Finden Sie Beispiele für Funktionen $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$ und $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.