Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 11

Analysis III WS 2013/2014

(Abgabe: 15.01.2014)

Aufgabe 1
Sei $f_\alpha : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$,

$$f_\alpha(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha},$$

wo $\alpha > 0$.
(i) Für welche α ist die Funktion f_α uneigentlich Riemann-integrierbar auf $\mathbb{R}_{>0}$?
(ii) Für welche α ist f_α Lebesgue-integrierbar?

Aufgabe 2
Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$.
(i) Zeigen Sie: Ist $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ eine Menge mit Lebesgue-Maß $\mu(A) < \infty$, dann ist $f|_A \in L^1(A)$ und

$$\int_A |f| d\mu \leq \mu(A)^{1-1/p} \|f\|_p.$$

(ii) Gilt $\|fg\|_1 = 0$ für alle $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, wo $1/p + 1/q = 1$, dann ist $f = 0$.

Aufgabe 3
(i) Indem Sie die Funktionenfolge $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x \in [-1, -1/n], \\ nx & \text{falls } x \in [-1/n, 1/n], \\ 1 & \text{falls } x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

betrachten, zeigen Sie, dass der Raum $C^0[-1, 1]$ der stetigen Funktionen auf $[-1, 1]$ nicht vollständig ist bezüglich der L^1-Norm.
(ii) Betrachte die Funktionenfolge $g_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $g_n = \chi_{I_n}$, wo $I_n = [q2^{-\nu}, (q + 1)2^{-\nu}]$ und wo ν und q die eindeutig bestimmten natürlichen Zahlen sind mit $n = 2^\nu + q$ und $q < 2^\nu$. Zeigen Sie, dass $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine L^1-Nullfolge ist, die in keinem Punkt $x \in [0, 1]$ konvergiert.

Aufgabe 4
Es bezeichne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ die Borel-Algebra bzw. die Lebesgue-Algebra auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:
(i) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$.
(ii) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \neq \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$. *Hinweis:* Betrachten Sie eine Teilmenge der Form $V \times \{0\}$, wo $V \subset \mathbb{R}^n$ keine Lebesgue-Menge ist.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 08.01-13.01 besprochen werden:

- Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

  uneigentlich Riemann integrierbar ist auf $\mathbb{R}_{>0}$, aber nicht Lebesgue-integrierbar.

- Wiederholen Sie die Hölder-Ungleichung und ihren Beweis.

  Zeigen Sie: Ist $1 < p < q < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, dann gilt $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ für jedes $r \in [p, q]$.

- Wiederholen Sie den Beweis der Vollständigkeit der L^p-Räume. Schlussfolgern Sie aus dem Beweis: Ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ eine Cauchy-Folge, dann konvergiert eine geeignete Teilfolge von (g_n) fast überall gegen den L^p-Grenzwert.

- Wiederholen Sie die Definition des Produktes $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}' \subset \mathcal{P}(X \times X')$ von zwei σ-Algebren $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ bzw. $\mathcal{A}' \subset \mathcal{P}(X')$ und die Konstruktion von Produktmaßen.

  Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Mengensystem, so dass (i) $X \in \mathcal{M}$, (ii) $A, B \in \mathcal{M}, B \subset A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{M}$, (iii) $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ paarweise disjunkt $\Rightarrow \cup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ genau dann eine σ-Algebra ist, wenn $\mathcal{M}$ durchschnittsstabil ist.