Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 12

Analysis III WS 2013/2014

(Abgabe: 22.01.2014)

Aufgabe 1
(i) Sei $(\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ die Vervollständigung eines Maßraums $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und sei $f : X \to \overline{R}$ eine $\overline{\mathcal{A}}$-messbare Funktion. Zeigen Sie, dass eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion $g : X \to \overline{R}$ existiert, so dass $f = g$ fast überall gilt.
(ii) Seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$ zwei Maßrüme und $f : X_1 \times X_2 \to \overline{R}$ eine $\overline{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}-$messbare Funktion mit $f = 0$ fast überall. Zeigen Sie, dass für fast alle $x_1 \in X_1$ gilt: $f(x_1, \cdot) = 0$ fast überall auf X_2.

Aufgabe 2
Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Borel-Menge und $f : B \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nicht-negative Funktion. Zeigen Sie:
(i) f ist genau dann Borel-messbar, wenn

$$V = \{(x, t) \in B \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

eine Borel-Menge ist.
(ii) Ist f Borel-messbar, dann gilt

$$\int_B f d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \lambda^n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq t\}) d\lambda^1(t).$$

Aufgabe 3
Berechnen Sie für $0 \leq r < R$ die Integrale:
(i) $\int_{r \leq \|x\| \leq R} \exp(-\|x\|^2) d\lambda^4(x)$,
(ii) $\int_{r \leq \|x\| \leq R} x_i^2 \exp(-\|x\|^2) d\lambda^4(x), i = 1, \ldots, 4$.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3 auf der Rückseite.

Aufgabe 4
(i) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{>0}$ stetig und $K := \{(x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$. Zeigen Sie:

$$\lambda^3(K) = \pi \int_a^b f^2(x) d\lambda^1(x).$$

(ii) Sei $0 < r < R < \infty$. Berechnen Sie das Volumen des Volltorus $T \subset \mathbb{R}^3$, der durch Rotation der Kreissscheibe

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, (x - R)^2 + z^2 \leq r^2\}$$

um die z-Achse entsteht.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 15.01-20.01 besprochen werden:

- Sei $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ eine Nullmenge. Zeigen Sie, dass eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^m$ existiert, so dass für jedes $y \in \mathbb{R}^m \setminus N$ die Menge

  $$A_y := \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in A\} \subset \mathbb{R}^n$$

  eine Nullmenge ist.

  Zeigen Sie durch die Angabe eines Beispiels, dass man im Allgemeinen nicht $N = \emptyset$ setzen kann.

- Zeigen Sie für das Volumen $\tau_n = Vol_n(B(0,1))$ der n-dimensionalen Einheitskugel die Formel

  $$\tau_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)},$$

  wo Γ die Eulersche Gamma-Funktion ist.

- Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Borel-messnare Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \mapsto f(\|x\|)$ genau dann Lebesgue-integrierbar ist, wenn $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \overline{\mathbb{R}}$, $r \mapsto f(r)r^{n-1}$ Lebesgue-integrierbar ist und dass in diesem Fall gilt:

  $$\int_{\mathbb{R}^n} f(\|x\|) d\lambda^n(x) = n\tau_n \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} f(r) r^{n-1} d\lambda^1(r).$$

- Berechnen Sie das Integral

  $$\int_{\mathbb{R}^n} exp(-\|x\|^2) d\lambda^n(x).$$