Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 13

Analysis III WS 2013/2014

(Abgabe: 29.01.2014)

Aufgabe 1
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sign}(xy)}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } x = y = 0. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass die beiden Integrale $\int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)d\lambda^1(x))d\lambda^1(y)$ und $\int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)d\lambda^1(y))d\lambda^1(x)$ existieren und berechnen Sie diese.
(ii) Beweisen Sie, dass f nicht Lebesgue-integrierbar ist auf $\mathbb{R}^2$. *Hinweis:* Benutzen Sie z. B. den Satz über die Integration rotationssymmetrischer Funktionen (Aufgabe 3 auf der Rückseite von Blatt 12).

Aufgabe 2
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $T : X \to X'$ eine Abbildung und $\mathcal{A}' := T_*(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}(Y)$ die in Aufgabe 2(ii) auf Blatt 5 definierte σ-Algebra.
(i) Zeigen Sie, dass durch $(T_*\mu)(B) := \mu(T^{-1}(B))$ ein Maß auf $\mathcal{A}'$ definiert ist und dass eine $\mathcal{A}'$-messbare Funktion $g : X' \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann $T_*\mu$-integrierbar ist, wenn $g \circ T$ μ-integrierbar ist und in diesem Fall

$$\int_{X'} gd(T_*\mu) = \int_X (g \circ T)d\mu$$

gilt.
(ii) Sei jetzt T bijektiv. Zeigen Sie, dass für jede μ-integrierbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_X fd\mu = \int_{X'} (f \circ T^{-1})d(T_*\mu).$$

Aufgabe 3
Es seien λ_1, λ_2 und μ Maße auf einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie:
(i) $\lambda_1 << \mu, \lambda_2 \perp \mu \Rightarrow \lambda_1 \perp \lambda_2$.
(ii) $\lambda_1 << \mu, \lambda_1 \perp \mu \Rightarrow \lambda_1 = 0$.

Aufgabe 4 (Die Jacobi-Abbildung)
Definiere $J_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ rekursiv durch $J_1(x) = x$ und

$$J_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} J_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})(1 - x_n) \\ x_1 x_n \end{pmatrix}$$

für $n \geq 2$. Zeigen Sie:
(i) $\det J_n'(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{n-1}(1 - x_3)(1 - x_4)^2 \cdots (1 - x_n)^{n-2}$.
(ii) J_n bildet $(0,1)^n$ diffeomorph ab auf $(\Delta^n)^0 := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j > 0 \text{ und } \sum_{j=1}^n x_j < 1\}$.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 22.01-27.01 besprochen werden:

- Bestimmen Sie, für welche $a > 0$ die Funktion

$$f(x, y) = \frac{1}{x + y}$$

  über $\{(x, y) \in (0, 1)^2 : y \leq x^a\}$ Lebesgue-integrierbar ist.

- Zeigen Sie direkt, ohne Benutzung der allgemeinen Transformationsformel, dass für alle $T \in GL(n, \mathbb{R})$ und $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\lambda^n(B) = |\det T|(T_*\lambda^n)(B).$$

  Schlussfolgern Sie zusammen mit Aufgabe 2 auf der Vorderseite, dass eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ geneau dann Lebesgue-integrierbar ist, wenn die Funktion $x \mapsto f(Tx)$ Lebesgue-integrierbar ist und dass in diesem Fall gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\lambda^n(x) = |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} f(Tx) d\lambda^n(x).$$

- Was bedeutet die Notation $\lambda << \mu$ bzw $\lambda \perp \mu$ für zwei Maße λ, μ? Sei $\mu = \delta_p$ ein Dirac-Maß. Für welche maße λ gilt: $\lambda << \mu$, $\mu << \lambda$ bzw. $\lambda \perp \mu$?

  Weisen Sie die Eindeutigkeit im Lebesgueschen Zerlegungssatz (VL Satz 274) nach.

- Sei $J_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Abbildung aus Aufgabe 4 auf der Vorderseite. Zeigen Sie:

$$J_n(\mathbb{R}_{>0} \times (0, 1)^{n-1}) = (\mathbb{R}_{>0})^n.$$