Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 14

Analysis III WS 2013/2014

(Abgabe: 05.02.2014)

Aufgabe 1
Wir betrachten auf $(\Delta^n)^0 = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n : x_1 + \cdots + x_n < 1\}$ die Funktion $F(x_1, \dots, x_n) = x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n} f(x_1 + \cdots + x_n)$, wo $p_j \in \mathbb{Z}$ und $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-messbare Funktion ist, die nicht fast überall verschwindet. Zeigen Sie:
(i) F ist genau dann über $(\Delta^n)^0$ integrierbar, wenn $p_j \in \mathbb{N}$ für alle j ist und $u \mapsto u^{p_1 + \cdots + p_n + n - 1} f(u)$ über $(0,1)$ integrierbar ist.
(ii) Gegebenenfalls gilt

$$\int_{(\Delta^n)^0} F(x) d\lambda^n(x) = \frac{p_1! \cdots p_n!}{(p_1 + \cdots p_n + n - 1)!} \int_{(0,1)} u^{p_1 + \cdots + p_n + n - 1} f(u) d\lambda^1(u).$$

Hinweis: Benutzen Sie zum Beispiel das Ergebnis von Aufgabe 4 auf Blatt 13.

Aufgabe 2
(i) Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine invertierbare affine Abbildung und $K \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda^n(K) > 0$ eine kompakte Teilmenge mit Schwerpunkt S. Zeigen Sie: $T(S)$ ist der Schwerpunkt von $T(K)$.
(ii) Berechnen Sie den Schwerpunkt von $\Delta^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n : x_1 + \cdots + x_n \leq 1\}$.

Aufgabe 3
(i) Sei $\Phi : \mathbb{R}_{>0} \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $(r, \theta, \varphi) \mapsto (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta)$. Berechnen Sie $\det \Phi'$.
(ii) Sei $R > 0$ und sei $m : [0, r] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie (z. B. mithilfe von (i)), dass für jedes $Q \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt:

$$\int_{B^3(0,R)} \frac{m(\|x\|)}{\|x - Q\|} d\lambda^3(x) = \frac{4\pi}{\|Q\|} \int_{(0,R)} m(u) u^2 d\lambda^1(u).$$

Aufgabe 4
Seien $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ zwei Lebesgue-Mengen mit positivem Maß.
(i) Sei $\lambda^1(A), \lambda^1(B) < \infty$. Benutzen Sie die Idee aus dem Beweis des ersten Schrittes der Transformationsformel (VL Satz 277), um zu zeigen, dass die Funktion $F(x) = \int_{x-A} \chi_B(y) d\lambda^1(y)$ stetig ist.
(ii) Begründen Sie, warum $F^{-1}(0, \infty) \subset A + B$ gilt und zeigen Sie: $\int_{(0,\infty)} F(x) d\lambda^1(x) = \lambda^1(A)\lambda^1(B)$. Schlussfolgern Sie mithilfe von (i), dass $A + B$ ein nicht-leeres offenes Intervall enthählt (vgl. Aufgabe 1 auf Blatt 8).

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 29.01-03.02 besprochen werden:

- Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Fubini das Integral von $f(x, y) = x^{n-1}y^{m-1}$, $n, m \in \mathbb{N}$ über $[0, 1]^2$ bzw. über Δ^2.

- Definiere den Schwerpunkt S einer kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $\lambda^n(K) > 0$ durch

$$(S)_k = \frac{1}{\lambda^n(K)} \int_K x_k d\lambda^n(x), k = 1, \ldots, n.$$

  Berechnen Sie den Schwerpunkt der Halbkugel $\{(x, y, z) \in B^3(1, 0) : z > 0\}$.

- Wiederholen Sie die Idee der Berechnung von Integralen in $\mathbb{R}^2$ mithilfe von Polarkoordinaten.

  Berechnen Sie für $m, n \in \mathbb{N}$

$$\int_{B^2(1,0)} x^n y^m d\lambda^2(x, y).$$

- Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{>0})$ eine Lebesgue-Menge vom positiven Maß. Zeigen Sie, dass die Mange $\frac{A}{A} := \{\frac{x}{y} : x, y \in A\}$ ein nicht-leeres offenes Intervall enthält.

  Geben Sie zwei Lösungswege an: Einmal als Korollar aus der Transformationsformel und dem Ergebnis von Aufgabe 1 auf Blatt 8 und einmal direkt, indem Sie die Stetigkeit der Abbildung

$$x \mapsto \int_{x \cdot A} \chi_A d\lambda^1$$

  im Punkt $x = 1$ nachweisen und sie dann benutzen (vgl. Schritt 1 im Beweis der Transformationsformel in der Vorlesung).