Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 15

Analysis III WS 2013/2014

(Freiwillige Abgabe am 12.02.2014)

Aufgabe 1
(i) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $M' \subset \mathbb{R}^{n'}$ eine Untermannigfaltigkeit mit Rand. Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt $M \times M' \subset \mathbb{R}^{n+n'}$ eine Untermannigfaltikeit mit Rand ist.
(ii) Seien jetzt $M \subset \mathbb{R}^n$ und $M' \subset \mathbb{R}^{n'}$ Untermannigfaltigkeiten mit (nicht-leerem) Rand. Entscheiden Sie, ob $M \times M' \subset \mathbb{R}^{n+n'}$ eine Untermannigfaltikeit mit Rand ist. Begründen Sie!

Aufgabe 2
(i) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{>0}$ stetig differenzierbar und

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in (a, b), x^2 + y^2 = f(z)\}.$$

Zeigen Sie:

$$\lambda_M(M) = 2\pi \int_{[a,b]} f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2}\,d\lambda^1(t).$$

(ii) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\lambda_M(M)$ des Torus

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\},$$

wo $0 < r < R < \infty$.

Aufgabe 3
Sei $N := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \le r^2\}$, $0 < r < R < \infty$ (vgl. Aufgabe 2(ii)).
(i) Berechnen Sie das äußere Einheits-Normalenfeld $\nu : \partial N \to \mathbb{R}^3$ von N.
(ii) Berechnen Sie $\int_{\partial N} \langle F(x), \nu(x)\rangle d\lambda_{\partial N}$ für $F(x, y, z) := (x, y, z)$.

Aufgabe 4
Betrachte auf $N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \ge 0, x^2 + y^2 \le 1\}$ das Vektorfeld

$$F(x, y, z) := \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{falls } x = y = 0. \end{cases}$$

(i) Berechnen Sie $\int_N \operatorname{div} F d\lambda^2$.
(ii) Berechnen Sie $\int_{\partial N} \langle F, \nu\rangle d\lambda_{\partial N}$, wo $\nu : \partial N \to \mathbb{R}^3$ das äußere Einheits-Normalenfeld von N ist. Ist F stetig auf $N \setminus \partial N$ bzw. auf N?

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 05.02-10.02 besprochen werden:

- Zeigen Sie, dass $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ keine Untermannigfaltigkeit mit Rand ist.
- Zeigen Sie für jede Lebegsue-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Formel
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\lambda^n(x) = \int_{(0,\infty)} (\int_{\{\|\xi\|=1\}} f(r\xi) r^{n-1} d\lambda_{\partial B^n(0,r)})) \lambda^1(r).$$
Berechnen Sie den Inhalt $\lambda_{S^n}(S^n)$ der n-dimensionalen Einheitssphäre.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt $\lambda_M(M)$ des Rotationsellipsoids
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\},$$
wo $a, b, c > 0$.
- Was besagt der Gaußsche Integralsatz? Begründen Sie: Ist $F(x) = c$ ein konstantes Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$, dann gilt für jedes Gebiet $N \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand:
$$\int_{\partial N} \langle F, \nu \rangle d\lambda_{\partial N} = 0.$$
Berechnen Sie $\int_{\partial N} \langle F, \nu \rangle d\lambda_{\partial N}$ für
$$N := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \leq 1\}$$
und
$$F(x, y, z) := (3x^2 z, y^2 - 2x, z^3).$$