Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 2

Analysis III WS 2013/2014

(Abgabe: 30.10.2013)

Aufgabe 1
Für zweimal stetig differenzierbare Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $\mathbf{a} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiere

$$\nabla f, \text{rot } \mathbf{a} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

$$(\nabla f)_i := \partial_{x_i} f, (\text{rot } \mathbf{a})_i = \partial_{x_j} a_k - \partial_{x_k} a_j,$$

wobei $i \in \{1,2,3\}$ und (i,j,k) eine zyklische Permutation des Tripels $(1,2,3)$ ist. Weiterhin seien

$$\Delta f, \text{div } \mathbf{a} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$

$$\Delta f := \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i}^2 f, \text{div } \mathbf{a} := \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} a_i.$$

Zeigen Sie:
(i) $(\text{rot } (f \cdot \mathbf{a}))_i = (\nabla f)_j \cdot a_k - (\nabla f)_k \cdot a_j + f \cdot (\text{rot } \mathbf{a})_i$.
(ii)$(\text{rot } (\text{rot } \mathbf{a}))_i = (\nabla(\text{div } \mathbf{a}))_i - \Delta a_i$.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung f in jedem Punkt ihres Definitionsbereich die Voraussetzungen des Satzes über die Umkehrabbildung erfüllt. Entscheiden Sie, ob f bijektiv ist.
(i) $f : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\frac{3}{4}\}, f(z) = z^2 + z + 1$.
(ii) $f : B_1(0) \to \mathbb{R}^n, f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\|x\|^2}} x$, wo $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen $O(3,1) \subset M(4,\mathbb{R})$ bzw. $SL(n) \subset M(n,\mathbb{R})$ Untermannigfaltigkeiten sind und geben Sie jeweils ihren Tangentialraum im Punkt E an, wo E die Einheitsmatrix bezeichnet:
(i) $O(3,1) = \{X \in M(4,\mathbb{R}) : X^T D X = D\}$, wobei D die Diagonalmatrix mit den Einträgen $(1,1,1,-1)$ ist. *Hinweis:* Betrachten Sie die Abbildung $F : M(4,\mathbb{R}) \to Sym(4,\mathbb{R}) = \{A \in M(4,\mathbb{R}) : A^T = A\}$, $X \mapsto X^T D X$. Zeigen Sie, dass D ein regulärer Wert von F ist.
(ii) $SL(n) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$. *Hinweis:* Zweite Aufgabe auf der Rückseite von Blatt 9 aus Analysis II.

Aufgabe 4
(i) Skizzieren Sie die Teilmenge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^2 \text{ und } (x,y) \neq (0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ und beweisen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit ist.
(i) Zeigen Sie, dass $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^2\}$ *keine* Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist. *Hinweis:* Beweisen Sie, dass es keine Parametrisierung von N in einer Umgebung des Punktes $(0,0)$ gibt.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 23.10-28.10 besprochen werden:

- Zeigen Sie:

$$\text{rot } (\nabla f) = \text{div rot } \mathbf{a} = 0 \text{ und}$$

$$\text{div } (\nabla f) = \Delta f.$$

  Hier sind die Bezeichnungen wie in Aufgabe 1 auf der Vorderseite.

- Sei

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

$$F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

  Bestimmen Sie, in welchen Punkten das Differential dF invertierbar ist. Zeigen Sie, dass jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ genau zwei Urbildpunkte unter F besitzt.

- Zeigen Sie, dass $O(n) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) : X^T X = E\} \subset M(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$, wo E die Einheitsmatrix bezeichnet, eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$ ist und geben Sie den Tangentialraum $T_E O(n)$ im Punkt E an. *Hinweis:* Betrachten Sie die Abbildung $G : M(n, \mathbb{R}) \to Sym(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) : A^T = A\}$, $X \mapsto X^T X$. Zeigen Sie, dass E ein regulärer Wert von G ist.

- Skizzieren Sie die Teilmenge $L = \{(x, y) : x^2(1 - x^2) - y^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ und zeigen Sie, dass sie keine Untermannigfaltigkeit ist.