Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 3

Analysis III WS 2013/2014

(Abgabe: 06.11.2013)

Aufgabe 1

(i) Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die 0 als regulären Werte hat. Zeigen Sie, dass

$$M_f := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_3) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

(ii) Sei jetzt f gegeben durch $f(s,t) = (s-a)^2 + t^2 - b^2$, wo $0 < b < a$. Bestimmen Sie für jedes $x = (x_1, x_2, x_3) \in M_f$ den Tangentialraum $T_x M_f$. *Bemerkung:* In diesem Fall nennt man die Fläche M_f einen *Torus*.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktionen:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = \sin x_1 \sin x_2$.

(ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2) \exp(x_1 x_2)$.

Aufgabe 3

(i) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und sei $p \in \mathbb{R}^n$. Sei weiterhin $q \in M$ ein Punkt mit der Eigenschaft, dass entweder $d(p,q) = \min\{d(p,q') : q' \in M\}$ oder $d(p,q) = \max\{d(p,q') : q' \in M\}$ gilt, wo $d(p,q') = \|q' - p\|$ den euklidischen Abstand bezeichnet. Zeigen Sie, dass $p - q$ senkrecht ist zu $T_q M$, d. h. dass $\langle p - q, v \rangle = 0$ gilt für alle $v \in T_q M$.

(ii) Zeigen Sie, dass $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit ist und bestimmen Sie den Punkt q von H, der den minimalen Abstand zu $p = (1, -1, 0)$ hat.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung bis einschließlich der Glieder zweiter Ordnung

(i) Der Funktion f aus Aufgabe 2(i) im Punkt $(0, \frac{\pi}{2})$.

(ii) Der Funktion g aus Aufgabe 2(ii) im Punkt $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 30.10-04.11 besprochen werden:

- Wir betrachten die Abbildung

  $$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2).$$

  Zeigen Sie, dass für alle $p, q \in S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ gilt:

  $$f(q) = f(p) \iff q = \pm p.$$

  Beweisen Sie, dass das Differential *df* in jedem Punkt von S^2 injektiv ist und schlussfolgern Sie, dass $M := f(S^2) \subset \mathbb{R}^6$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit ist. *Bemerkung:* Man nennt M *reelle projektive Ebene.*

- Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

  $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = (4x_1^2 + x_2^2) \exp(-x_1^2 - 4x_2^2).$$

- Sei $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar und sei 0 ein regulärer Wert von φ. Sei weiterhin $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie: Gilt für ein $q \in \varphi^{-1}(0)$, dass entweder $f(q) = \min\{f(q') : q' \in \varphi^{-1}(0)\}$ oder $f(q) = \max\{f(q') : q' \in \varphi^{-1}(0)\}$, dann ist $\nabla f(q)$ eine Linearkombination von $\nabla\varphi_1(q), \ldots, \nabla\varphi_k(q)$.

  Bestimmen Sie das Maximum von $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n$ auf

  $$M = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_{>0} : x_1 + \cdots + x_n = 1\}.$$

- Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung bis einschließlich der Glieder zweiter Ordnung der Funktion

  $$f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$$

  im Punkt $(1, 1)$.