Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 4

Analysis III WS 2013/2014

(Abgabe: 13.11.2013)

Aufgabe 1
Wir nehmen an, dass wir auf einer Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ein Maß μ definiert haben, dass invariant unter Translation und additiv auf abzählbaren disjunkten Vereinigungen ist (wenn diese wieder in $\mathcal{A}$ liegen). Wir nehmen weiterhin an, dass alle Mengen der Form $I_1 \times I_2 \times ... \times I_n \in \mathcal{A}$ sind. Die $I_k \subset \mathbb{R}$ sind Intervalle (offen, abgeschlossen oder halboffen). Geometrisch sind das Quader, deren Kanten parallel zu den Koordinatenachsen sind, die kurz "Intervalle" (des $\mathbb{R}^n$) genannt seien. Zeigen Sie, dass dann

$$\mu(I_1 \times I_2 \times ... \times I_n) = |I_1| \cdot |I_2| \dots |I_n| \mu([0,1]^n)$$

ist. Hierbei bezeichne $|I|$ die Länge des Intervalles I. Hinweis: Betrachten Sie zunächst Intervalle der Form $[0, \frac{1}{k})^n$ für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Zerlegen Sie $[0,1)^n$ und vergleichen sie die Werte der beiden Intervalle. Benutzen Sie anschließend, dass die rationalen Zahlen dicht in den reellen liegen.

Aufgabe 2
Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heiße Jordan-messbar, falls ihre zugehörige charakteristische Funktion χ_A Riemann-integrierbar ist. Dabei sei der Fall, dass das Unter- und Oberintegral beide unendlich sind, zugelassen; das Riemann-Integral ist dann unendlich. Das Jordan-maß ist dann definiert durch

$$\lambda(A) := \int \chi_A(x) dx.$$

(i) Begründen Sie, dass mit Jordan-messbaren Mengen auch alle Translationen und endliche Vereinigungen wieder Jordan-messbar sind. Zeigen Sie, dass λ translationsinvariant und endlich additiv ist.
(ii) Beweisen Sie: ist $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Jordan-messbarer Mengen und deren Vereinigung auch Jordan-messbar, so ist

$$\lambda(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(A_i).$$

(iii) Zeigen Sie, dass die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ Jordan-messbar ist und bestimmen Sie $\lambda(\mathbb{Z})$.
(iv) Geben Sie ein Beispiel einer Folge disjunkter Jordan-messbarer Mengen an, deren Vereinigung nicht Jordan-messbar ist.

Aufgabe 3
Für eine beliebige Menge $A \subset \mathbb{R}$ sei das äußere Maß definiert als

$$\mu^*(A) := \inf\{\sum_{k=0}^{\infty} |I_k| \quad | \quad I_k \subset \mathbb{R} \text{ Intervalle }, A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k\}.$$

Der Wert unendlich ist dabei zugelassen.
(i) Zeigen Sie: Ist A Jordan-messbar, so ist $\lambda(A) = \mu^*(A)$.
(ii) Begründen Sie, dass μ^* translationsinvariant ist.
(iii) Finden Sie ein Beispiel zweier Mengen, das zeigt, dass μ^* nicht (endlich) additiv ist. Hinweis: Benutzen Sie die Vitali-Mengen aus der Vorlesung.

Aufgabe 4
Es bezeichne $\mathbb{F}_2$ den Körper mit zwei Elementen. Sei X eine Menge und sei R die Menge aller Abbildungen $X \to \mathbb{F}_2$.
(i) Zeigen Sie, dass R mit punktweiser Addition bzw. Multiplikation ein kommutativer Ring mit Eins wird.
(ii) Für eine Teilmenge $A \subset X$ sei $\chi_A \in R$ definiert durch

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Zeigen Sie die Formeln $\chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B$ und $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$, wobei $A\Delta B := (A \cup B) \setminus A \cap B$ ist.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 06.11-11.11 besprochen werden:

- Wiederholen Sie die Begriffe "offene und abgeschlossene Mengen" im $\mathbb{R}^n$.

  Zeigen Sie, dass jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ gleich einer abzählbaren Vereinigung *halboffener Intervalle des* $\mathbb{R}^n$, d. h. eine Teilmengen der Form $[a_1, b_1) \times \cdots [a_n, b_n)$ ist.

- Wiederholen Sie den Ihnen aus der linearen Algebra bekannten Begriff eines kommutativen Rings. Wie ist der Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen definiert?

- $n \in \mathbb{N}$ sei fixiert. Bezeichne $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ die Menge aller halboffenen Intervalle des $\mathbb{R}^n$. Für $W = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) \in \mathcal{E}_n$ sei $\mu(W) := \Pi_{j=1}^n (b_j - a_j)$. Zeigen Sie: Ist die die abzählbar unendliche Vereinigung halboffenener Intervalle $W = \cup_{i=1}^{\infty} W_i$ selbst ein halboffenes Intervall in $\mathbb{R}^n$, d.h. $W_i, W \in \mathcal{E}_n$ für $i = 1, 2, \dots$ und $W_i \cap W_j = \emptyset$ für $i \neq j$, dann gilt $\mu(W) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(W_i)$.

  Anleitung
  1) Wiederholen Sie den Beweis der analogen Aussage im Fall einer *endlichen* Vereinigung $W = \cup_{i=1}^m W_i$.
  2) Beweisen Sie, dass für jedes $W \in \mathcal{E}_n$ und für jedes $\varepsilon > 0$ Elemente $W', W'' \in \mathcal{E}_n$ existieren, so dass
  $$\overline{W'} \subset W \subset \overset{\circ}{W''}, \mu(W') \geq (1 - \varepsilon)\mu(W) \text{ und } \mu(W'') \leq (1 + \varepsilon)\mu(W).$$
  3) Benutzen Sie 1), 2) und den Satz von Heine-Borel, um die Ungleichung $\mu(W) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(W_i)$ zu beweisen.
  4) Begründen Sie die umgekehrte Ungleichung $\mu(W) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(W_i)$.

- Für eine beliebige Menge $A \subset \mathbb{R}$ sei das innere Maß definiert als
  $$\mu_*(A) := \sup\{\sum_{k=0}^{\infty} |I_k| \quad | \quad I_k \subset \mathbb{R} \text{ paarweise disjunkte abgeschlossene Intervalle }, \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k \subset A\}.$$
  Der Wert unendlich ist dabei zugelassen.
  (i) Begründen Sie, dass μ_* translationsinvariant ist.
  (ii) Finden Sie ein Beispiel zweier Mengen, das zeigt, dass μ_* nicht (endlich) additiv ist.

- Suchen Sie in der Literatur oder dem Internet nach einem Beispiel für ein endlich additives, translationsinvariantes Maß auf $\mathbb{R}$.