Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 5

Analysis III WS 2013/2014

(Abgabe: 20.11.2013)

Aufgabe 1
Sei $n > 2$ und sei $I \subset \{0, 1, \dots, n-1\}$ eine Teilmenge mit $1 \leq |I| \leq n-2$. Sei $C_{n,I} \subset [0,1]$ gegeben durch

$$C_{n,I} = \{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{n^j} : k_j \in \{0, \dots, n-1\} \setminus I\}.$$

Zeigen Sie:
(i) Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren $0 \leq a_1 < b_1 < \cdots < a_m < b_m \leq 1$, so dass $C_{n,I} \subset \bigcup_{j=1}^{m} [a_j, b_j]$ und $\sum_{j=1}^{m} (b_j - a_j) < \varepsilon$.
(ii) $C_{n,I}$ ist gleichmächtig mit $[0,1]$, d. h. es existiert eine bijektive Abbildung $C_{n,I} \to [0,1]$.

Aufgabe 2
(i) Sei X eine Menge und sei $\mathcal{A} := \{A \in X : A \text{ ist endlich oder } X \setminus A \text{ ist endlich}\}$. Bestimmen Sie, für welche X das Mengensystem $\mathcal{A}$ ein Ring, eine Algebra, bzw. eine σ-Algebra ist.
(ii) Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$f_*(\mathcal{A}) := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{P}(Y)$$

eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 3
(i) Zeigen Sie: Der Durchschnitt beliebig vieler σ-Algebren $(\mathcal{A}_i \subset \mathcal{P}(X))_{i \in I}$ ist wieder eine σ-Algebra.
(ii) Für eine Teilmenge $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ definiere

$$\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{E} \subset \mathcal{A} \\ \mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra}}} \mathcal{A}.$$

Zeigen Sie: Ist X ein topologischer Raum und bezeichnet $\mathcal{O}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ (bzw. $\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{P}(X)$) die Menge aller offenen (bzw. aller abgeschlossenen) Teilmengen von X, dann gilt $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(X)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(X))$.

Aufgabe 4
Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller $A \subset \mathbb{Z}_{>0} = \{1, 2, \dots\}$, so dass A oder $\mathbb{Z}_{>0} \setminus A$ endlich ist. Wir definieren $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$f(A) = \begin{cases} \sum\limits_{n \in A} \frac{1}{n^2} & \text{falls } A \text{ endlich ist,} \\ 2 - \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}_{>0} \setminus A} \frac{1}{n^2} & \text{falls } \mathbb{Z}_{>0} \setminus A \text{ endlich ist.} \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass μ ein Inhalt ist, d. h. dass $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle disjunkten Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ gilt.
(ii) Zeigen Sie, dass μ nicht σ-additiv ist, d. h. dass eine abzählbare Familie $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Mengen $A_i \in \mathcal{A}$ existiert, so dass $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ und $\mu(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \neq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$ ist.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 13.11-15.11 besprochen werden:

- Wiederholen Sie die Idee der Intervallschachtelung.

  Zeigen Sie: Die Menge $2^{\mathbb{N}}$ aller Folgen in $\{0,1\}$ ist gleichmächtig mit $[0,1]$.

- Sei $X = \mathbb{R}^n$ und sei $\mathcal{E}^n$ die Menge aller *halboffener Quader*, d. h. Teilmengen der Form $W = [a_1, b_1) \times \cdots [a_n, b_n)$. Definiere

  $$\mathcal{F}^n := \{\emptyset\} \cup \{W_1 \cup \cdots \cup W_m : m \geq 1, W_j \in \mathcal{E}^n \text{ und } W_i \cap W_j = \emptyset \text{ für } i \neq j\}.$$

  Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}^n$ ein Ring ist. Ist $\mathcal{F}^n$ eine Algebra?

- Wiederholen Sie den Begriff eines topologischen Raums.

  Zeigen Sie: Ist $(X, \mathcal{O})$ ein Hausdorff-Raum, so dass $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Algebra ist, dann ist bereits $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$. Gilt dies auch ohne die Hausdorff-Voraussetzung?

- Begründen Sie, warum die Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ aus Aufgabe 4 auf der Vorderseite eine Algebra ist.

  Sei X eine beliebige Menge und sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ die Teilmenge aller $A \subset X$, so dass A endlich oder abzählbar unendlich ist. Begründen Sie, dass $\mathcal{R}$ ein Ring ist und dass die Abbildung

  $$\mu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\},$$

  die jeder Menge $A \in \mathcal{R}$ die Anzahl ihrer Elemente zuordnet, ein σ-additiver Inhalt auf $\mathcal{R}$ ist.