Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 6

Analysis III WS 2013/2014

(Abgabe: 27.11.2013)

Aufgabe 1
Sei $\mu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ (siehe z. B. Blatt 5 Aufgabe 4(i) für den Begriff eines Inhalts).
(i) Begründen Sie, warum μ monoton ist, d. h. $\mu(A) \leq \mu(B)$ gilt für alle $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \subset B$.
(ii) Man nennt μ σ-additiv, wenn für jede abzählbare Familie paarweise disjunkter Mengen $B_n \in \mathcal{R}$ mit $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{R}$ gilt:

$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n).$$

Zeigen Sie, dass μ genau dann σ-additiv ist, wenn gilt: Sind $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Mengen in $\mathcal{R}$ mit $A_n \subset A_{n+1}$ (bzw. $A_n \supset A_{n+1}$) für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $A := \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$ (bzw. $A := \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$), dann ist

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Aufgabe 2
Es bezeichne $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ die Menge der endlichen und $\overline{\mathcal{F}}^n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ die Menge der unendlichen Figuren in $\mathbb{R}^n$. Definiere $\mathcal{F}^n =: \mathcal{F}^n_1 \subset \mathcal{F}^n_2 \subset \cdots$ und $\overline{\mathcal{F}}^n =: \overline{\mathcal{F}}^n_1 \subset \overline{\mathcal{F}}^n_2 \subset \cdots$ sukzessive durch

$$\mathcal{F}^n_{k+1} := \{\cup_{j=0}^N A_j \setminus B_j : A_j, B_j \in \overline{\mathcal{F}}^n_k\} \text{ und } \overline{\mathcal{F}}^n_{k+1} := \{\cup_{j=0}^\infty A_j \setminus B_j : A_j, B_j \in \overline{\mathcal{F}}^n_k\}.$$

(i) Zeigen Sie für alle Mengen A, B, C und D mit $B \subset A$ und $D \subset C$ die Formel

$$(A \setminus B) \setminus (C \setminus D) = A \setminus (B \cup C) \sqcup (A \cap D) \setminus (B \cap D).$$

Schlussfolgern Sie, dass jedes $\mathcal{F}^n_k$, $k > 1$, eine Algebra ist.
(ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q} \in \overline{\mathcal{F}}^n_2$, aber $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \notin \overline{\mathcal{F}}^n_2$ ist.

Aufgabe 3
Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra und sei $(\mu_n : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen auf $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:
(i) Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen ist durch $\mu(A) := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mu_n(A)$ ein Maß auf $\mathcal{A}$ definiert.
(ii) Gilt $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und jedes $A \in \mathcal{A}$, dann ist durch $\mu(A) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$ ebenfalls ein Maß auf $\mathcal{A}$ gegeben.

Aufgabe 4
(i) Begründen Sie, warum jede offene und jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ Borelsch ist, d. h. in der von der Menge $\mathcal{E}^n$ der halboffenen Quader erzeugten σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}^n)$ liegt.
(ii) Ein äußeres Maß auf einer Menge X ist eine Abbildung $\eta : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, welche die Bedingungen (b) und (c) im Anschluss an Definition 227 der Vorlesung erfüllt. Entscheiden Sie, ob die durch

$$\eta(A) := \lambda^n(\overline{A})$$

definierte Abbildung ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}^n$ ist. Hierbei bezeichnet $\overline{A}$ den Abschluss von A bezüglich der Standard-Topologie von $\mathbb{R}^n$ und $\lambda^n : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ ist das Lebesgues-Maß.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 20.11-25.11 besprochen werden:

- Wiederholen Sie den Begriff eines Inhalts auf einem Ring.

  Sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein Inhalt. Zeigen Sie die Formel

$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu(A_i \cap A_j)$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} \mu(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$

- Zeigen Sie für jede abzählbare Familie $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \overline{\mathcal{F}}^n$ die Ungleichung

$$\mu(\cup_{n=0}^{\infty} B_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n).$$

  Hier ist $\overline{\mathcal{F}}^n$ die Menge der unendlichen Figuren $B = \sqcup_{k=0}^{\infty} [a_{k,1}, b_{k,1}) \times \cdots \times [a_{k,n}, b_{k,n})$ und $\mu(B) = \sum_{k=0}^{\infty} (b_{k,1} - a_{k,1}) \cdots (b_{k,n} - a_{k,n})$.

- Wiederholen Sie den Begriff eines äußeren Maßes auf einer Menge X und eines Maßes auf einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$.

  Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra, $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ ein Maß und $B \in \mathcal{A}$ eine Menge mit $\mu(B) \notin \{0, \infty\}$. Begründen Sie, warum $\mu_B : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$,

$$\mu_B(A) := \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}$$

  ebenfalls ein Maß auf $\mathcal{A}$ ist.

- Wiederholen Sie die Grundidee der Konstruktion der Borel-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und des Lebesgues-Maßes $\lambda^n : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

  Wiederholen Sie den Begriff einer Nullmenge in $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$.

  Begründen Sie, warum jede abzählbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ eine Nullmenge ist und benutzen Sie dies für einen alternativen Beweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$.