Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 7

Analysis III WS 2013/2014

(Abgabe: 04.12.2013)

Aufgabe 1 (Wiederholung: Extrema mit Nebenbedingungen)
Es seien $p_1, \ldots, p_n$ positive reelle Zahlen mit $p_1 + \cdots + p_n = 1$ und sei

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : p_1x_1 + \cdots + p_nx_n = \frac{1}{n} \text{ und } x_k > 0 \text{ für alle } k\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}$ auf M ein Maximum annimmt und bestimmen Sie dieses.
(ii) Schlussfolgern Sie, dass für alle positiven reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ die folgende *verallgemeinerte AM-GM-Ungleichung* gilt:

$$a_1^{p_1} \cdots a_n^{p_n} \leq p_1a_1 + \cdots p_na_n.$$

Aufgabe 2
Es bezeichne μ^* das in VL Definition 227 eingeführte äußere Maß auf $\mathbb{R}^n$. Sei $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, d. h. gelte $\mu^*(N) = 0$.
(i) Zeigen Sie für jede Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ die Gleichheiten

$$\mu^*(X \cup N) = \mu^*(X \setminus N) = \mu^*(X).$$

(ii) Beweisen Sie: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, so dass $N \subset U$ und $\mu^*(U) < \varepsilon$. *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass für jeden halboffenen Quader $A \in \mathcal{E}^n$ ein *offener* Quader B existiert mit $A \subset B$ und $\mu(B) < (1 + \varepsilon)\mu(A)$.

Aufgabe 3
(i) Beweisen Sie, dass $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ eine Nullmenge ist.
(ii) Sei $V \subset [0, 1]$ eine Vitali-Menge. Zeigen Sie, dass $V \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ keine Borel-Menge ist und schlussfolgern Sie, dass es Nullmengen gibt, die keine Borel-Mengen sind.

Aufgabe 4
(i) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

ein Maß auf der Borel-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (ein sogenanntes *Dirac-Maß*) definiert ist.
(ii) Zeigen Sie: Ist μ ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, das nur die beiden Werte 0 und 1 annimmt, dann ist entweder $\mu \equiv 0$ oder $\mu = \delta_x$ für ein $x \in \mathbb{R}$. *Hinweis:* Intervallschachtelung und Aufgabe 1(ii) auf Blatt 6.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 27.11-02.12 besprochen werden:

- (Wiederholung) Sei A eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix. Indem Sie das Maximum der Funktion $f(x) = x^T Ax$ auf S^{n-1} betrachten, zeigen Sie, dass A einen reellen Eigenwert besitzt.

  Schlussfolgern Sie die Existenz von n paarweise senkrechten Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ von A.

- Begründen Sie: Eine beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ is genau dann Jordan messbar (siehe Blatt 4, Aufgabe 2), wenn

  $$\sup\{\mu(X) : X \subset A, X \in \mathcal{F}\} = \inf\{\mu(Y) : A \subset Y, Y \in \mathcal{F}\}$$

  gilt. In diesem Fall ist das Jordan-Maß von A gleich dem gemeinsamen Wert. Hier ist $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ die Menge der Figuren und $\mu(I) = |I|$.

  Wiederholen Sie den Begriff einer Nullmenge in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass eine beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ genau dann Jordan-messbar ist, wenn ∂A eine Nullmenge ist.

- Zeigen Sie: Ist $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, dann ist das Bild $F(N)$ jeder Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ ebenfalls eine Nullmenge.

- Begründen Sie, warum die Vitali-Mengen keine Lebesgue-Mengen sind.

  Zeigen Sie: Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-Menge, dann existieren Teilmengen $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ mit $X \subset B \subset Y$, so dass X (bzw. Y) eine abzählbare Vereinigung (bzw. ein abzählbarer Durchschnitt) von abgeschlossenen (bzw. von offenen) Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist und so dass $Y \setminus X$ eine Nullmenge ist.