Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 8

Analysis III WS 2013/2014

(Abgabe: 11.12.2013)

Aufgabe 1
Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Lebesgue-Menge mit Lebesgue-Maß $\mu(A) < \infty$. Zeigen Sie:
(i) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ mit $A \subset U$ und $\mu(U) - \mu(A) < \varepsilon$.
(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ mit $K \subset A$ und $\mu(A) - \mu(K) < \varepsilon$.
Hinweis: Benutzen Sie z. B. das Ergebnis der letzten Aufgabe auf der Rückseite von Blatt 7.
(iii)* (Zusatzaufgabe) Sei jetzt $\mu(A) > 0$. Beweisen Sie: Mit $A - A := \{x - y : x, y \in A\}$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$(-\delta, \delta) \subset A - A.$$

gilt. *Hinweis:* Betrachten Sie $\delta := dist(K, \mathbb{R} \setminus U)$, wo $A \subset U$ offen, $K \subset A$ kompakt und $\mu(U) < 2\mu(K)$.

Aufgabe 2
Sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ der von allen halboffenen Intervallen der Form $\Pi_{j=1}^n [k_j, k_j + 1)$, $k_j \in \mathbb{Z}$ erzeugte Ring. Bezeichne für ein Prämaß μ auf $\mathcal{R}$ mit μ^* das dazugehörige äußere Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, definiert durch

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_k) : A \subset \cup_{k=0}^{\infty} E_k, E_k \in \mathcal{R}, E_i \cap E_j = \emptyset \text{ für } i \neq j\}.$$

Bestimmen Sie für das nachfolgend angegebene Prämaß μ auf $\mathcal{R}$, welche Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ μ^*-messbar sind:
(i) $\mu(\Pi_{j=1}^n [k_j, k_j + 1)) = 1$ für alle $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$.
(ii) $\mu(\Pi_{j=1}^n [k_j, k_j + 1)) = F(k_1, \ldots, k_n)$, wo $F : \mathbb{Z}^n \to \{0; 1\}$ eine gegebene Funktion ist.

Aufgabe 3
(i) Begründen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-messbar, dann ist für jedes $y \in \overline{\mathbb{R}}$ das Urbild $f^{-1}(y)$ eine Lebesgue-Menge.
(ii) Sei $V \subset [0, 1]$ eine Vitali-Menge und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in V, \\ -|x| & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus V. \end{cases}$$

Bestimmen Sie für jedes $y \in \mathbb{R}$ das Urbild $f^{-1}(y)$ und begründen Sie, warum $f^{-1}(y)$ eine Lebesgue-Menge ist. Zeigen Sie, dass f nicht Lebesgue-messbar ist.

Aufgabe 4
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.
(i) Entscheiden Sie, wann eine gegebene einfache Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, $f = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}$, $A_j \in \mathcal{A}$, $a_j \in \mathbb{R}$ μ-integrierbar ist.
(ii) Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $f \equiv g$ fast überall. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{A}$ vollständig, dann ist f genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn g $\mathcal{A}$-messbar ist.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 04.12-09.12 besprochen werden:

- Sei $V \subset [0,1]$ eine Vitali-Menge. Begründen Sie, warum weder V noch $V - V := \{x - y : x, y \in V\}$ ein nichtleeres offenes Intervall enthält.

  Geben Sie ein Beispiel einer Lebesgue-Menge $A \subset \mathbb{R}$, so dass $\mu(A) > 0$ gilt und A kein nichtleeres offenes Intervall enthält.

- Sei für $B \subset \mathbb{R}$

$$\mu^*(B) = \begin{cases} 0 & \text{falls } B = \emptyset, \\ 1 & \text{falls } B \neq \emptyset \text{ und } B \text{ beschränkt,} \\ \infty & \text{falls } B \text{ unbeschränkt.} \end{cases}$$

  Begründen Sie, warum μ^* ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist und bestimmen Sie, welche Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$ μ^*-messbar sind.

- Wann heißt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-messbar bzw. Lebesgue-messbar?

  Zeigen Sie: Ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von f abzählbar (bzw. eine Nullmenge), dann ist f Borel-messbar (bzw. Lebesgue-messbar).

- Wiederholen Sie den Begriff der Messbarkeit bzw. der Integrierbarkeit einer Funktion auf einem (beliebigen) Maßraum. Wann sagt man, dass zwei Funktionen auf einem Maßraum fast überall gleich sind?

  Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar und $g : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-messbar und beschränkt. Zeigen Sie, dass das Produkt $f \cdot g$ μ-integrierbar ist.