Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 9

Analysis III WS 2013/2014

(Abgabe: 18.12.2013)

Aufgabe 1
(i) Zeigen Sie, dass jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar ist.
(ii) Geben Sie ein Beispiel einer Borel-messbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $f|_{[0,1]}$ nicht Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 2
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ zwei $\mathcal{A}$-messbare Funktionen und $A \in \mathcal{A}$.
(i) Sei $\mu(A) < \infty$. Zeigen Sie: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq f(x) \leq b$ für alle $x \in X$, dann gilt

$$a\mu(A) \leq \int_A f d\mu \leq b\mu(A).$$

(ii) Gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in X$, dann ist

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu.$$

Aufgabe 3
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktionen. Zeigen Sie:
(i) Falls $\int_X |f| d\mu = 0$ gilt, dann ist f fast überall gleich Null, d. h. $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ ist eine μ-Nullmenge.
(ii) Falls $\int_X f d\mu < \infty$ gilt, dann ist f fast überall endlich, d. h. $\{x \in X : f(x) = \infty\}$ ist eine μ-Nullmenge.

Aufgabe 4
Sei für eine (nicht notwendigerweise Lebesgue-messbare) Funktion $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$

$$I_*(f) := \sup\{\sum_{j=1}^{N} a_j \mu(A_j) : A_j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \text{ und } 0 \leq \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{A_j} \leq f\},$$

wo $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ die Lebesgue-Algebra und μ das Lebesgue-Maß bezeichnet.
(i) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$, so dass $I_*(f) = 0$ gilt und $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ keine Lebesgue-Nullmenge ist.
(ii) Geben Sie ein Beispiel für Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ mit $I_*(f + g) \neq I_*(f) + I_*(g)$.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 11.12-16.12 besprochen werden:

- Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$, $f : X \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion und $A, B \in \mathbb{R}$ mit $A \leq f(x) < B$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_X f d\mu = \lim_{k\to\infty} S(Z_k, f)$$

gilt für jede Folge $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}$ mit $\lim_{k\to\infty} \nu(Z_k) = 0$. Hier ist

$$\mathcal{Z} = \{((t_j)_{0\leq j\leq m}, (\xi_j)_{1\leq j\leq m}) : m \in \mathbb{N}_{>0}, A = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = B \text{ und } \xi_j \in [t_{j-1}, t_j]\},$$

$$S(Z, f) = \sum_{j=0}^{m} \xi_j \mu(\{t_{j-1} \leq f < t_j\})$$

und

$$\nu(Z) = \max\{t_j - t_{j-1} : 1 \leq j \leq m\}.$$

(vgl. den Begriff der Riemannschen Summen).

- Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion.

  Nach VL Satz 246 existiert eine Folge einfacher $\mathcal{A}$-messbarer Funktionen $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die punktweise monoton gegen f konvergiert. Begründen Sie, warum der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \int_X \varphi_k d\mu$ existiert und zeigen Sie (direkt, ohne Benutzung des Satzes von Beppo Levi), dass er unabhängig ist von der Wahl der Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

  Schlussfolgern Sie, dass $\lim_{k\to\infty} \int_X \varphi_k d\mu = \int_X f d\mu$ gilt, wo auf der rechten Seite das Lebesgue-Integral steht (VL Definition 247 (2)). Hier ist für eine einfache Funktion $\varphi = \sum_{j=0}^{m} a_j \chi_{A_j}$, $A_j \in \mathcal{A}$ wie üblich $\int_X \varphi d\mu = \sum_{j=0}^{m} a_j \mu(A_j)$.

- Wiederholen Sie den Begriff einer μ-Nullmenge in einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

- Sei $V \subset [0, 1]$ eine Vitali-Menge. Begründen Sie, warum es keine Lebesgue-Menge A gibt mit $\mu(A) > 0$ und $A \subset V$. Zeigen Sie, dass es keine Lebesgue-Nullmenge N gibt mit $V \subset N$.

  Zeigen Sie für jede Teilmenge $M \subset [0, 1]$ die Formel

$$I_*(\chi_M) = 1 - \mu^*([0, 1] \setminus M).$$

  Hier ist μ^* das übliche äußere Maß auf $\mathbb{R}$ und $I_*(\chi_M)$ ist wie in Aufgabe 4 auf der Vorderseite definiert.