Musterlösung Übungsblatt 14

Analysis III WS 2013/2014

Aufgabe 1

Sei $J_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die in Aufgabe 4 auf Blatt 13 angegebene Jacobische Abbildung. Nach Teil (ii) dieser Aufgabe definiert J_n einen Diffeomorphismus $(0,1)^n \to (\Delta^n)^0$. Durch Anwendung der Transformationsformel folgt: F ist genau dann über $(\Delta^n)^0$ integrierbar, wenn die Funktion

$$u \mapsto F(J_n(u))|\det\, J_n'(u)|$$

über $(0,1)^n$ integrierbar ist, und gegebenenfalls sind die beiden Integrale gleich.

Mithilfe vollständiger Induktion nach $n \geq 2$ und der Rekursionsformel $J_{n+1}(u_1, \ldots, u_{n+1}) = (J_n(u_1, \ldots, u_n)(1-u_{n+1}), u_1 u_{n+1})$ bzw. aus Aufgabe 4.13(i) folgt:

$$\sum_{k=1}^{n} (J_n(u_1, \ldots, u_n))_k = u_1, \tag{1}$$

$$\Pi_{k=1}^{n} (J_n(u_1, \ldots, u_n))_k^{p_k} = u_1^{p_1+\cdots+p_n} P_n(u_2, \ldots, u_n), \tag{2}$$

wo

$$P_{n+1}(u_2, \ldots, u_{n+1}) = u_{n+1}^{p_{n+1}} (1-u_{n+1})^{p_1+\cdots+p_n} P_n(u_2, \ldots, u_n) \tag{3}$$

und

$$\det\,(J_n'(u_1, \ldots, u_n)) = u_1^{n-1} Q_n(u_2, \ldots, u_n), \tag{4}$$

wo

$$Q_{n+1}(u_1, \ldots, u_{n+1}) = (1-u_{n+1})^{n-1} R_n(u_2, \ldots, u_n). \tag{5}$$

Wir beweisen jetzt die Behauptungen (i) und (ii) der Aufgabenstellung mithilfe vollständiger Induktion nach $n \geq 2$.

Für $n = 2$ folgt ergeben die Transformationsformel, der Satz von Fubini und der Ausschöpfungssatz:

$$\int_{(\Delta^2)^0} F(x) d\lambda^n(x) = \int_{(0,1)^2} u_1^{p_1+p_2} f(u_1)(1-u_2)^{p_1} u_2^{p_2} d\lambda^2(u_1, u_2) =$$

$$\int_{(0,1)} (1-u_2)^{p_1} u_2^{p_2} d\lambda^1(u_2) \int_{(0,1)} u_1^{p_1+p_2} f(u) d\lambda^1(u) = \frac{p_1! p_2!}{(p_1+p_2+1)!} \int_{(0,1)} u_1^{p_1+p_2} f(u) d\lambda^1(u),$$

wobei der letztere Rechenschritt nach mehrmaliger partieller Integration folgt. Insbesodere ist die Bedingung $p_1, p_2 \geq 0$ für die Integrierbarkeit von F notwendig: Ist $f > \varepsilon > 0$ (bzw. $f < -\varepsilon < 0$) auf einer Lebesgue-Menge $B \subset (0,1)$ vom positiven Maß, dann ist für $p < 0$ wegen Fubini und Ausschöpfungssatz

$$\int_{B \times (0,1)} u_1^{p_1+p_2} (1-u_2)^{p_1} u_2^{p_2} f(u_1) d\lambda^2(u_1, u_2) = \infty$$

(bzw. $= -\infty$).

Seien jetzt die Aussagen für ein $n \geq 2$ bewiesen. Wie im Fall $n = 2$ berechnet man

$$\int_{(\Delta^{n+1})^0} F(x) d\lambda^{n+1}(x) =$$

$$\int_{(0,1)^{n+1}} P_{n+1}(u_2, \dots, u_{n+1}) Q_{n+1}(u_2, \dots, u_{n+1}) u_1^{p_1+\cdots+p_{n+1}+n} f(u_1) d\lambda^{n+1}(u_1, \dots, u_{n+1}) =$$

$$\int_{(0,1)^n} P_{n+1}(u_2, \dots, u_{n+1}) Q_{n+1}(u_2, \dots, u_{n+1}) d\lambda^n(u_2, \dots, u_{n+1}) \int_{(0,1)} u^{p_1+\cdots+p_{n+1}+n} f(u) d\lambda^1(u).$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\int_{(0,1)^{n-1}} P_n(u_2, \dots, u_n) Q_n(u_2, \dots, u_n) d\lambda^n(u_2, \dots, u_n) = \frac{p_1! \dots p_n!}{(p_1 + \cdots + p_n + n - 1)!}.$$

Mithilfe von $(2) - (5)$ und des Satzes von Fubini ergibt sich

$$\int_{(0,1)^n} P_{n+1}(u_2, \dots, u_{n+1}) Q_{n+1}(u_2, \dots, u_{n+1}) d\lambda^n(u_2, \dots, u_{n+1}) =$$

$$\int_{(0,1)} u_{n+1}^{p_{n+1}} (1 - u_{n+1})^{p_1+\cdots+p_n+n-1}) d\lambda^1(u) \frac{p_1! \dots p_n!}{(p_1 + \cdots + p_n + n - 1)!} =$$

$$\frac{(p_1 + \cdots + p_n + n - 1)! p_{n+1}!}{(p_1 + \cdots + p_{n+1} + n)!} \frac{p_1! \dots p_n!}{(p_1 + \cdots + p_n + n - 1)!} =$$

$$\frac{p_1! \dots p_{n+1}!}{(p_1 + \cdots + p_{n+1} + n)!}.$$

Die Notwendigkeit der Bedinungen $p_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n+1$, für die Integrierbarkeit von F folgt wie im Fall $n = 2$.

Aufgabe 2

(i) Sei $T : x \mapsto Lx + v$, wo $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung ist und $v \in \mathbb{R}^n$. Nach Voraussetzung ist T invertierbar. Da lineare Abbildungen beliebig oft differenzierbar sind, ist T ein Diffeomorhismus. Es ist $\det T' = \det L$.

Nach Definition ist der Schwerpunkt von $T(K)$ gegeben durch

$$(S(T(K)))_k = \frac{1}{\lambda^n(T(K))} \int_{T(K)} x_k d\lambda^n(x), k = 1, \dots, n.$$

Anwendung der Transformationsformel ergibt

$$(S(T(K)))_k = \frac{1}{\lambda^n(T(K))} \int_K (Tx)_k |\det L| d\lambda^n(x) = \frac{1}{\lambda^n(T(K))} \int_K (Lx + v)_k |\det L| d\lambda^n(x)$$

und wegen der Linearität des Lebesgue-Integrals

$$(S(T(K)))_k = \frac{|\det L|}{\lambda^n(T(K))} (L(\int_K x d\lambda^n(x)) + \lambda^n(K) v)_k.$$

Da als Konsequenz der Transformationsformel $\lambda^n(T(K)) = |\det L| \lambda^n(K)$ ist, folgt schließlich

$$(S(T(K)))_k = L(S(K) + v)_k = (T(S(K)))_k$$

oder $S(T(K)) = T(S(k))$.

(ii) Nach Definition ist

$$S(\Delta^n)_k = \frac{1}{\lambda^n(\Delta^n)} \int_{\Delta^n} x_k d\lambda^n(x).$$

Mit $F(x_1, \ldots, x_n) = x_k$ folgt aus Aufgabe 1(i):

$$\int_{\Delta^n} x_k d\lambda^n(x) = \frac{1}{n!} \int_{(0,1)} u^n d\lambda^1(u) = \frac{1}{(n+1)!}$$

und mit $F(x_1, \ldots, x_n) = 1$:

$$\lambda^n(\Delta^n) = \int_{\Delta^n} 1 d\lambda^n(x) = \frac{1}{n!}.$$

Daraus ergbibt sich $S(\Delta^n) = (\frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1})$.

Aufgabe 3

(i) Wir berechnen

$$\det\, \Phi' = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\cos\theta \begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} + r\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$r^2\cos^2\theta\sin\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2\sin^3\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) =$$

$$r^2\sin\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2\sin\theta.$$

(ii) Wir nehmen zunächst an, dass Q die Form $Q = (0, 0, \|Q\|)$ hat. Dann ist

$$\|\Phi(r,\theta,\varphi) - Q\|^2 = r^2\sin^2\theta + (r\cos\theta - \|Q\|)^2 = r^2 - 2\|Q\|r\cos\theta + \|Q\|^2.$$

Anwendung der Transformationsformel, Satz von Fubini und die Substitution $\cos\theta = s$ ergeben für $\|Q\| > r$:

$$\int_{B^3(0,R)} \frac{m(\|x\|)}{\|x-Q\|} d\lambda^3(x) = \int_{(0,R)\times(0,\pi)\times(0,2\pi)} \frac{m(r)r^2\sin\theta}{\sqrt{r^2 - 2\|Q\|r\cos\theta + \|Q\|^2}} d\lambda^3(r,\theta,\varphi) =$$

$$2\pi \int_{(0,R)} \int_{(-1,1)} \frac{m(r)r^2}{\sqrt{r^2 + \|Q\|^2 - 2\|Q\|rs}} d\lambda^1(s) d\lambda^1(r) =$$

$$2\pi \int_{(0,R)} \left[2m(r)r^2 \frac{\sqrt{r^2 + \|Q\|^2 - 2\|Q\|rs}}{2\|Q\|r} \right]_1^{-1} d\lambda^1(r) =$$

$$\frac{2\pi}{\|Q\|} \int_{(0,R)} m(r)r((\|Q\| + r) - (\|Q\| - r)) d\lambda^1(r) = \frac{4\pi}{\|Q\|} \int_{(0,R)} m(r)r^2 d\lambda^1(r).$$

Um auf den Fall eines allgemeinen Q zu schließen, betrachte $O \in O(3)$ mit $O((0,0,\|Q\|)) = Q$. Wegen $Q(B^3(0,R)) = B^3(0,R)$ und $|\det O| = 1$ ergibt die Transformationsformel

$$\int_{B^3(0,R)} \frac{m(\|x\|)}{\|x-Q\|} d\lambda^3(x) = \int_{B^3(0,R)} \frac{m(\|Ox\|)}{\|Ox-Q\|} d\lambda^3(x) =$$

$$\int_{B^3(0,R)} \frac{m(\|x\|)}{\|x - O^{-1}Q\|} d\lambda^3(x) = \int_{B^3(0,R)} \frac{m(\|x\|)}{\|x - (0,0,\|Q\|)\|} d\lambda^3(x).$$

Aufgabe 4

(i) Wir betrachten für $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{x-A} \chi_B(y) d\lambda^1(y) = \lambda^1((x-A) \cap B).$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ definiert die Abbildung $B' \mapsto \lambda^1((x-A) \cap B')$ ein Maß μ_{x-A} auf $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, welches absolut stetig ist bezüglich des Lebesgue-Maßes. Aus Lemma 279 der Vorlesung folgt: Es existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $B' \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ mit $\lambda^1(B') < \delta$ gilt: $\mu_{x-A}(B') < \varepsilon$.

Da B eine Lebesgue-Menge vom endlichen Maß ist, existieren nach Aufgabe 4 auf der Rückseite von Blatt 7 eine kompakte Teilmenge $K \subset B$ und eine offene Obermenge $B \subset U$ mit $\lambda^1(U \setminus K) < \delta$. Da K kompakt ist und $K \cap \mathbb{R} \setminus U = \emptyset$ gilt, ist $\delta' := d(K, \mathbb{R} \setminus U) > 0$.

Für $x' \in (x - \delta', x + \delta')$ gilt

$$K \subset (x - x') + U.$$

Hieraus folgt

$$\lambda^1(((x-x') + U) \setminus K) = \lambda^1((x-x') + U) - \lambda^1(K) = \lambda^1(U) - \lambda^1(K) < \delta$$

und damit nach Wahl von δ

$$\mu_{x-A}(((x-x') + U) \setminus K) < \varepsilon.$$

Wir bemerken, dass

$$F(x') = \lambda^1((x' - A) \cap B) = \lambda^1(x - A \cap ((x-x') + B)) = \mu_{x-A}((x-x') + B)$$

gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} F(x') \geq \mu_{x-A}((x-x') + K) &= \mu_{x-A}((x-x') + U) - \mu_{x-A}(((x-x') + U) \setminus K) \\ &> \mu_{x-A}(B) - \varepsilon = F(x) - \varepsilon \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} F(x') \leq \mu_{x-A}((x-x') + U) &\leq \mu_{x-A}(K) + \mu_{x-A}(((x-x') + U) \setminus K) \\ &< \mu_{x-A}(B) + \varepsilon = F(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die Stetigkeit von F bewiesen.

(ii) Falls $F(x) > 0$ ist für ein $x \in \mathbb{R}$, dann ist $\lambda^1((x-A) \cap B) > 0$ und insbesondere $(x-A) \cap B \neq \emptyset$. Damit gilt $x \in A + B$. Hieraus folgt die Inklusion $F^{-1}((0,\infty)) \subset A + B$.

Mithilfe des Satzes von Fubini berechnet man

$$\int_{(0,\infty)} F(x) d\lambda^1(x) = \int_{(0,\infty)} \left(\int_{x-A} \chi_B(y) d\lambda^1(y) \right) d\lambda^1(x) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_B(x) \chi_{x-A}(y) d\lambda^2(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \chi_B(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{x-A}(y) d\lambda^1(y) \right) d\lambda^1(x) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_B(x) \lambda^1(x - A) d\lambda^1(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_B(x) \lambda^1(A) d\lambda^1(x) = \lambda^1(A)\lambda^1(B) > 0.$$

Insbesondere ist F nicht konstant gleich Null. Wegen der Stetigkeit folgt hieraus, dass $F^{-1}((0,\infty))$, und damit auch $A + B$, ein nicht-leeres offenes Intervall enthält.