Musterlösung Übungsblatt 15

Analysis III WS 2013/2014

Aufgabe 1

(i) Sei $(p, p') \in M \times M'$ beliebig. Da $M \subset \mathbb{R}^n$ (bzw. $M' \subset \mathbb{R}^{n'}$) eine Untermannigfaltigkeit (bzw. eine Untermannigfaltigkeit mit Rand) ist, existiert eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^m$, $m = \dim M$ (bzw. $V' \subset \mathbb{R}^{m'}$, $m' = \dim M'$) und eine glatte Immersion $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ (bzw. $\varphi' : V' \to \mathbb{R}^n$), so dass φ (bzw. $\varphi'|_{\mathbb{H}^{m'}}$) ein Homöomorphismus auf eine offene Umgebung $U \subset M$ von p (bzw. $U' \subset M'$ von p') ist. Hier ist $\mathbb{H}^{m'} = \{x \in \mathbb{R}^{m'} : x_{m'} \geq 0\}$.

Die Abbildung $\varphi \times \varphi' : V \times V' \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n'}$ ist eine glatte Immersion, da φ und φ' glatte Immersionen sind. Da $U \subset M$ und $U' \subset M'$ offen sind, ist $W := U \times U' \subset M \times M'$ offen. Weiterhin ist die Einschränkung von φ auf $V \times (V' \cap \mathbb{H}^{m'}) = (V \times V') \cap \mathbb{H}^{m+m'}$ ein Homöomorphismus. Da (p, p') beliebig war, folgt, dass $M \times M' \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n'}$ eine Untermannigfaltigkeit mit Rand ist.

(ii) Wir zeigen: Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ bzw. $M' \subset \mathbb{R}^{n'}$ eine m-dimensionale bzw. eine m'-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit nicht-leerem Rand, dann ist $M \times M' \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n'}$ *keine* $(m + m')$-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand.

Seien $p \in \partial M$, $p' \in \partial M'$, $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ und $\varphi' : V' \to \mathbb{R}^n$ Immersionen mit $V \subset \mathbb{R}^m$ bzw. $V' \subset \mathbb{R}^{m'}$ offen und so dass die Einschränkung von φ bzw. von φ' auf $V \cap \mathbb{H}^m$ bzw. auf $V' \cap \mathbb{H}^{m'}$ ein Homöomorphismus auf eine offene Umgebung $p \subset U \subset M$ bzw. $p' \subset U' \subset M'$ ist. Durch Anwendung des Satzes über die implizite Abbildung folgt, indem man evtl. zu einer offenen Teilmenge von V übergeht: Es existieren $W, \widetilde{W} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in W$ und ein Diffeomorphismus $\Phi : W \to \widetilde{W}$ mit

$$q := \Phi(p) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-m} \text{ und } \Phi(U) = \widetilde{W} \cap (\mathbb{H}^m \times \{0\}).$$

Analog existieren $p' \in W' \subset \mathbb{R}^n$, $\widetilde{W}' \subset \mathbb{R}^{n'}$ und ein Diffeomorphismus $\Phi' : W' \to \widetilde{W}'$ mit den gleichen Eigenschaften.

Falls $U \times U' \subset \mathbb{R}^{n+n'}$ eine $(m + m')$-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand wäre, dann auch

$$(\Phi \times \Phi')(U \times U') = (\widetilde{W} \times \widetilde{W}') \cap (\mathbb{H}^m \times \{0\} \times \mathbb{H}^{m'} \times \{0\}).$$

Es genügt jetzt zu zeigen, dass

$$N := \mathbb{H}^m \times \{0\} \times \mathbb{H}^{m'} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+n'}$$

keine $(m + m')$-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand ist.

Falls $N \subset \mathbb{R}^{n+n'}$ eine $(m+m')$-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand ist, dann ist nach VL Satz 285

$$\partial N = \{x \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \times \mathbb{R}^{m'} \times \{0\} : (x_m, x_{n+m'}) \in \{0\} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}\}$$

eine $m+m'-1$ dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand. Der Tangentialraum $T_0(\partial N)$ ist dann ein $m+m'-1$-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^m \times \{0\} \times \mathbb{R}^{m'} \times \{0\}$. Da die glatte Abbildung $\pi_m : \partial N \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_m$ im Punkt $x = 0$ ein Minimum besitzt, folgt aus VL Satz 220, dass $T_0(\partial N)$ orthogonal ist zu grad π_m, d. h.

$$T_0(\partial N) \subset \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{m'} \times \{0\}.$$

Indem man $\pi_{n+m'} : \partial N \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_{n+m'}$ betrachtet, folgt analog:

$$T_0(\partial N) \subset \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{m'-1} \times \{0\},$$

also $\dim T_0(\partial N) \leq m + m' - 2$, Widerspruch.

Aufgabe 2

(i) Wir betrachten

$$\varphi : (a,b) \times (0, 2\pi) \to M,$$
$$(t,\theta) \mapsto (f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, z).$$

Wir haben

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = (f'(t)\cos\theta, f'(t)\sin\theta, 1) \text{ und } \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = (-f(t)\sin\theta, f(t)\cos\theta, 0).$$

Damit ist

$$g_{tt} = \langle\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\rangle = 1 + (f'(t))^2, g_{\theta\theta} = f^2(t)$$

und

$$g_{t\theta} = g_{\theta t} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\det\ (g_{ij})(t,\theta) = f^2(t)(1 + (f'(t))^2).$$

Da $M \setminus \varphi((a,b) \times (0,2\pi))$ eine Nullmenge ist, ergibt sich

$$\lambda_M(M) = \int_{(a,b)\times(0,2\pi)} \sqrt{\det\ (g_{ij})(t,\theta)}d\lambda^2(t,\theta)$$

$$= \int_{(a,b)\times(0,2\pi)} f(t)\sqrt{1 + (f'(t))^2}d\lambda^2(t,\theta) = 2\pi \int_{(a,b)} f(t)\sqrt{1+(f'(t))^2}d\lambda^1(t),$$

wobei wir im letzten Schritt den Satz von Fubini benutzt haben.

(ii) Wir betrachten

$$f_1 : [-r, r] \to \mathbb{R}_{>0},$$
$$f_1(t) = R + \sqrt{r^2 - t^2}$$

und

$$f_2 : [-r, r] \to \mathbb{R}_{>0},$$
$$f_2(t) = R - \sqrt{r^2 - t^2}.$$

Es gilt $M = M_1 \cup M_2$, wo $M_j = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = f_j^2(z)\}$, $j=1,2$. Da $M_1 \cap M_2$ eine Nullmenge ist, folgt mithilfe von (i):

$$\lambda_M(M) = \lambda_{M_1}(M_1) + \lambda_{M_2}(M_2)$$
$$= 2\pi \int_{(-r,r)} \left(f_1(t)\sqrt{1+(f_1'(t))^2} + f_2(t)\sqrt{1+(f_2'(t))^2} \right) d\lambda^1(t).$$

Wir berechnnen

$$f_1'(t) = -\frac{t}{\sqrt{r^2-t^2}} = -f_2'(t)$$

und daraus

$$f_1(t)\sqrt{1+(f_1'(t))^2} + f_2(t)\sqrt{1+(f_2'(t))^2}$$
$$= 2R\sqrt{1+\frac{t^2}{r^2-t^2}} = \frac{2rR}{\sqrt{r^2-t^2}}$$

und damit

$$\lambda_M(M) = 4\pi rR \int_{(-r,r)} \frac{dt}{\sqrt{r^2-t^2}} = 4\pi rR \int_{(-1,1)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$= 4\pi rR \arcsin t|_{-1}^{1} = 4\pi^2 rR.$$

Aufgabe 3

(i) Wir bestimmen für $p = (p_1,p_2,p_3) \in \partial N$ den Tangentialraum $T_p(\partial N)$. Da $\partial N = f^{-1}(0)$ mit $f(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2}-R)^2 + z^2 - r^2$, ist

$$T_p(\partial N) = \{v \in \mathbb{R}^3 : df_p(v) = 0\}$$
$$= \{v \in \mathbb{R}^3 : 2(\sqrt{p_1^2+p_2^2}-R)\frac{v_1p_1+v_2p_2}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}} + 2p_3v_3 = 0\}.$$

Damit ist der äußere Einheits-Normalenvektor ν ein Vielfaches von

$$\nu' = \left(p_1(1-\frac{R}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}), p_2(1-\frac{R}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}), p_3 \right).$$

Wir haben

$$\|\nu'\|^2 = (p_1^2+p_2^2)\frac{(\sqrt{p_1^2+p_2^2}-R)^2}{(p_1^2+p_2^2)} + p_3^2 = r^2$$

und daraus folgt $\nu = \pm\frac{1}{r}\nu'$. Da andererseits $N = \{(x,y,z) : f(x,y,z) \le 0\}$, ist $\langle \nu, \mathrm{grad}\ f\rangle > 0$ und wegen $\nu' = \frac{1}{2}\mathrm{grad}\ f$ folgt

$$\nu = \frac{1}{r}\nu' = \left(\frac{p_1}{r}(1-\frac{R}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}), \frac{p_2}{r}(1-\frac{R}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}), \frac{p_3}{r} \right).$$

(ii) Da $\mathrm{div}\ F = 3$ ist, ergibt der Gaußsche Divergenzsatz

$$\int_{\partial N} \langle F, \nu\rangle d\lambda_{\partial N} = \int_N 3d\lambda^3 = 3\lambda^3(N) = 6\pi^2r^2R,$$

wobei wir im letzten Schritt das Ergebnis von Aufgabe 4(ii) auf Blatt 12 benutzt haben.

Aufgabe 4

(i) Wir berechnen

$$\operatorname{div} F = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

und damit $\int_N \operatorname{div} F d\lambda^2 = 0$.

(ii) Mit

$$M_1 := (0,1) \times \{0\}, M_2 := \{0\} \times (0,1) \text{ und } M_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} : x^2 + y^2 = 1\}$$

ist

$$\partial N = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \{(0,0),(0,1),(1,0)\}.$$

Wir haben

$$\nu(x,y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{falls } (x,y) \in M_1, \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{falls } (x,y) \in M_2, \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \text{falls } (x,y) \in M_3. \end{cases}$$

Hieraus folgt $\langle F, \nu \rangle (x,y) = 0$ für $(x,y) \in M_1 \cup M_2$ und damit

$$\int_{\partial N} \langle F, \nu \rangle d\lambda_{\partial N} = \int_{M_3} \langle F, \nu \rangle d\lambda_{M_3}$$

$$= \int_{(0,\frac{\pi}{2})} \langle F, \nu \rangle (\cos\theta, \sin\theta) d\lambda^1(\theta) = \frac{\pi}{2}.$$

Das Vektorfeld F ist nicht stetig auf N, da für $(x_n, y_n) := (0, \frac{1}{n})$, $n = 1, 2, \dots$ gilt: $F(x_n, y_n) = (0, n) \to (0, \infty)$ für $n \to \infty$. F ist jedoch stetig auf $N \setminus \partial N$, da $x^2 + y^2 > 0$ ist für $(x,y) \in N \setminus \partial N$.