Vektorwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen

Bezeichnungen: Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum über $\mathbb{R}$. X^* = dualer Raum, $\langle x^*, x\rangle$ = Wert von x^*. Für $-\infty \le a < b \le +\infty$ sei

$$I := \{t \in \mathbb{R} \,|\, a < t < b\}.$$

$\mathcal{L}(\mathbb{R})$ = σ-Algebra der Lebesgue-meßbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$. $|A|$ = Lebesgue-Maß von $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Für $1 \le p \le +\infty$ sei

$$p' := \begin{cases} +\infty & \text{für} \quad p = 1, \\ \dfrac{p}{p-1} & \text{für} \quad 1 < p < +\infty, \\ 1 & \text{für} \quad p = +\infty. \end{cases}$$

1 Das Bochner-Integral

DEFINITION 1.1 *$u : I \to X$ heißt* **einfach**, *wenn*

$$u(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} \chi_{A_k}(t) x_k & \textit{für} \quad t \in \bigcup_{k=1}^{m} A_k, \\ 0 & \textit{für} \quad t \in I \setminus \bigcup_{k=1}^{m} A_k, \end{cases} \tag{1.1}$$

wobei $A_k \subset I, A_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}), A_k \cap A_l = \emptyset \, (k \neq l), |A_k| < +\infty$.

(1.1) heißt **Normaldarstellung**. Setzt man $A_0 := I \setminus \bigcup_{k=1}^{m} A_k, \quad x_0 := 0$, so gilt

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m} \chi_{A_k}(t) x_k$$ [1)]

DEFINITION 1.2 *$u : I \to X$ heißt*

[1)] Wir bemerken, daß $|A_0| = +\infty$, falls $|I| = +\infty$.

1) **schwach Bochner-meßbar**, *wenn für jedes* $x^* \in X$ *die Funktion*

$$t \mapsto \langle x^*, u(t) \rangle$$

meßbar ist;

2) (*stark*) **Bochner-meßbar**, *wenn eine Folge einfacher Funktionen* $u_j : I \to X$ *existiert, so daß*

$$u_j(t) \to u(t) \quad \textit{ffa. } t \in I.$$

Bemerkung: 1. Sind $u, v : I \to X$ schwach (bzw. stark) Bochner- meßbar, so ist für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ die Funktion $\alpha u + \beta v$ schwach (bzw. stark) Bochner-meßbar.
2. Ist $u : I \to X$ Bochner-meßbar, so ist $t \mapsto \|u(t)\|$ meßbar. In der Tat, ist $u_k : I \to X$ eine Folge einfacher Funktionen, die fast überall gegen u konvergiert, so gilt:

$$\|u_k(t)\| \to \|u(t)\| \quad \textit{ffa. } t \in I.$$

Da $t \mapsto \|u_k(t)\|$ meßbar ist, folgt die Meßbarkeit von $t \mapsto \|u\|$.

DEFINITION 1.3 (Bochner-Integral)

1) *Sei* $u : I \to X$ *einfach.*

$$\int_I u(t)\,\mathrm{d}t := \sum_{k=1}^m |A_k| x_k$$

heißt **Bochner-Integral der einfachen Funktion** u.

2) $u : I \to X$ heißt **Bochner-integrierbar**, *wenn eine Folge einfacher Funktionen* $u_j : I \to X$ *existiert, so daß*

   (i) $u_j(t) \to u(t)$ *ffa.* $t \in I$

   (ii) $\displaystyle\int_I \|u_j(t) - u(t)\|\,\mathrm{d}t \to 0.$

   Das **Bochner-Integral** *von* u *ist definiert durch:*

$$\int_I u(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{j\to\infty} \int_I u_j(t)\,\mathrm{d}t.$$

   u *heißt* **lokal Bochner-integrierbar** *auf* I, *wenn* u *auf jedem Teilintervall* $]t_1, t_2[$ $(a < t_1 < t_2 < b)$ *Bochner-integrierbar ist.*

Bemerkung: 1. Sei $u : I \to X$ einfach und

$$u(t) = \sum_{k=1}^{m} \chi_{A_k}(t) x_k = \sum_{l=1}^{n} \chi_{B_l}(t) y_l$$

zwei Normaldarstellungen von u. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{m} |A_k| x_k \;=\; \sum_{l=1}^{n} |B_l| y_l.$$

Das heißt: das Bochner-Integral für einfache Funktionen ist eindeutig bestimmt.

Außerdem ist $t \mapsto \|u(t)\|$ meßbar und es gilt:

$$\left\| \int_I u(t)\,\mathrm{d}t \right\| \;=\; \left\| \sum_{k=1}^{m} |A_k| x_k \right\| \;\le\; \sum_{k=1}^{m} |A_k| \|x_k\| = \int_I \|u(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

2. Sei $u : I \to X$ Bochner-integrierbar gemäß Definition 1.3 und $u_j : I \to X$ eine Folge einfacher Funktionen mit (i), (ii). Dann:

$$\begin{aligned} \left\| \int_I u_i(t)\,\mathrm{d}t - \int_I u_j(t)\,\mathrm{d}t \right\| \;&\le\; \int_I \|u_i(t) - u_j(t)\|\,\mathrm{d}t \;\le \\ &\le\; \int_I \|u_i(t) - u(t)\|\,\mathrm{d}t + \int_I \|u_j(t) - u(t)\|\,\mathrm{d}t \to 0 \end{aligned}$$

für $i, j \to \infty$. Somit ist $\left(\int_I u_j(t)\,\mathrm{d}t \right)$ eine Cauchy-Folge in X, also eine konvergente Folge. Sei nun $v_j \to X$ eine weitere Folge mit (i), (ii). Wir betrachten nun die Mischfolge $w_{2j+1} := u_j, w_{2j} = v_j$ $(j \in \mathbb{N})$. Auch diese genügt (i) und (ii). Dann ist $\left(\int_I w_j(t)\,\mathrm{d}t \right)$ eine in X konvergente Folge. Dies impliziert

$$\lim \int_I u_j(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \lim \int_I w_j(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_I v_j(t)\,\mathrm{d}t.$$

Also ist das Bochner-Integral eindeutig bestimmt.

Satz 1.4 (Pettis) *Sei X ein Banach-Raum. Für $u : I \to X$ sind äquivalent*

1° *u ist (stark) Bochner-meßbar;*

2°
$$\begin{cases} 1) \; u \textit{ ist schwach Bochner-meßbar}, \\ 2) \; \exists N \subset I, \textit{ so daß: } \; |N| = 0, \; \{u(t) \,|\, t \in I \setminus N\} \textit{ ist separabel.} \end{cases}$$

SATZ 1.5 (Bochner) *Sei X ein Banach-Raum. Für $u : I \to X$ sind äquivalent*

1° *u ist Bochner-integrierbar*;

2°

$$\begin{cases} 1) \ u \text{ ist Bochner-meßbar,} \\ 2) \ \displaystyle\int_I \|u(t)\| \, \mathrm{d}t < +\infty. \end{cases}$$

Eigenschaften des Bochner-Integrals

1. $u, v : I \to X$ Bochner-integrierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann:

$$\int_I (\alpha u(t) + \beta v(t)) \, \mathrm{d}t \; = \; \alpha \int_I u(t) \, \mathrm{d}t + \beta \int_I v(t) \, \mathrm{d}t.$$

2. $u, v : I \to X$ Bochner-integrierbar, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ meßbar, beschränkt. Dann ist $u \cdot \varphi$ Bochner-integrierbar auf I und es gilt

$$\left\| \int_I u(t)\varphi(t) \, \mathrm{d}t \right\| \; \leq \; \sup_I |\varphi| \int_I \|u(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

BEWEIS. - Sei $u_j : I \to X$ eine Folge einfacher Funktionen, die fast überall in I gegen u konvergiert und sei $\varphi_j : I \to \mathbb{R}$ eine Folge einfacher Funktionen, die fast überall gegen φ konvergiert. Dann ist $u_j \cdot \varphi_j : I \to X$ einfach für jedes $j \in \mathbb{N}$ und mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt

$$\|u_j(t)\varphi_j(t) - u(t)\varphi(t)\| \; \leq \; \|(u_j(t) - u(t))\| |\varphi_j(t)| \; + \; \|u(t)\| |\varphi_j(t) - \varphi(t)|.$$

Somit konvergiert $(u_j \cdot \varphi_j)$ fast überall gegen $u \cdot \varphi$, was zeigt, daß $u\varphi$ Bochner-meßbar ist. Auf der anderen Seite gilt:

$$\int_I \|u(t)\varphi(t)\| \, \mathrm{d}t \; \leq \; \sup_I |\varphi| \int_I \|u(t)\| \, \mathrm{d}t < +\infty.$$

Die Behauptung folgt nun aus dem Satz 1.5. ∎

3. Sei Y ein Banach-Raum, $u : I \to X$ Bochner-integrierbar, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist $T \circ u : I \to Y$ Bochner-integr. und es gilt:

$$\int_I (T \circ u)(t) \, \mathrm{d}t \; = \; T\bigg(\int_I u(t) \, \mathrm{d}t \bigg) \quad (\text{in } Y).$$

BEWEIS. - 1) Sei $u : I \to X$ einfach. Dann

$$T(u(t)) \;=\; T\Big(\sum_{k=1}^{m}\chi_{A_k}(t)x_k\Big) \;=\; \sum_{k=1}^{m}\chi_{A_k}(t)Tx_k.$$

$$\int_I (T\circ u)(t))\,\mathrm{d}t \;=\; \sum_{k=1}^{m}|A_k|Tx_k \;=\; T\Big(\sum_{k=1}^{m}|A_k|x_k\Big) \;=\; T\Big(\int_I u(t)\,\mathrm{d}t\Big).$$

2) $u : I \to X$ Bochner-integr., $u_j : I \to X$ approximierende Folge. Dann ist $T\circ u$ wegen $Tu_j(t) \to Tu(t)$ ffa. $t \in I$ Bochner-meßbar. Da T beschränkt ist, folgt aus Satz 1.5, daß $T\circ u$ Bochner- integrierbar ist und wir haben

$$T\Big(\int_I u(t)\,\mathrm{d}t\Big) \;=\; \lim T\Big(\int_I u_j(t)\,\mathrm{d}t\Big) \;=\; \lim\int_I Tu_j(t)\,\mathrm{d}t \;=$$
$$=\; \lim\int_I T(u_j-u)(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \int_I Tu(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \lim\int_I Tu(t)\,\mathrm{d}t.$$

Insbesondere: $\quad \Big\langle x^*, \int_I u(t)\,\mathrm{d}t\Big\rangle \;=\; \int_I \langle x^*, u(t)\rangle(t)\,\mathrm{d}t \quad \forall\, x^* \in X^*.$

4. $-\infty < a < b < +\infty$; $u :]a,b[\to X$ stetig und beschränkt. Dann ist u Bochner-integrierbar auf $]a,b[$.

Lebesgue-Punkte

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. $t_0 \in I$ heißt Lebesgue-Punkt von f, wenn

$$\lim_{h\to 0, h>0}\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}|f(t)-f(t_0)|\,\mathrm{d}t \;=\; 0.$$

Satz (Lebesgue) *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann existiert $N \subset I$:*

$$|I| = 0, \quad \textit{jedes} \quad t \in I\setminus N \quad \textit{ist Lebesgue-Punkte von} \quad f.$$

Ist t_0 ein Lebesgue-Punkt von f, so gilt

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; f(t_0).$$

■

Satz 1.6 *Sei $u : I \to X$ lokal Bochner-integrierbar Dann:*

$$\lim_{h\to 0, h>0} \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} \|u(t)-u(t_0)\|\,\mathrm{d}t \;=\; 0 \quad \textit{ffa. } t_0 \in I.$$

Beweis. - Sei (u_j) approximierende Folge für u auf $[\alpha,\beta] \subset I$. Dann ist $\bigcup_{j=1}^{\infty} u_j([\alpha,\beta])$ abzählbar. $\Rightarrow$ $\exists N \subset [\alpha,\beta]$ mit $|N| = 0$, so daß:

1) $u_j(t) \to u(t) \quad \forall\, t \in [\alpha,\beta] \setminus N$

2) $t \in [\alpha,\beta] \setminus N$ ist Lebesgue-Punkt für $\|u(\cdot)-x\| \quad \forall\, x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} u_j([\alpha,\beta])$, d.h.

$$\lim_{h\to 0, h>0} \frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} \|u(s)-x\|\,\mathrm{d}s \;=\; \|u(t)-x\| \quad \text{ffa. } t_0 \in I.$$

Dann erhält man mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\limsup_{h\to 0, h>0} \frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} \|u(s)-u(t)\|\,\mathrm{d}s \;\le\; 2\|u(t)-x\|.$$

Die Behauptung folgt nun wegen $x = u_j(t) \to u(t)$. ■

Folgerung 1.7 *Sei $u : I \to X$ lokal integr. mit*

$$\int_I u(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \;=\; 0 \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(I).$$

Dann: $u(t) = 0$ ffa. $t \in I$.

Beweis. - Seien $a < t_1 < t_2$. Sei $0 < \varepsilon < \min\{t_1 - a, b - t_2\}$. Sei $\varphi \in C_c^\infty(I)$ mit $0 \le \varphi \le 1$ in I, $\varphi \equiv 1$ auf $[t_1,t_2]$ $\varphi \equiv 0$ in $I \setminus [t_1-\varepsilon, t_2+\varepsilon]$. Dann

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{t_1}^{t_2} u(t)\,\mathrm{d}t\right\| &= \left\|\int_{t_1}^{t_2} u(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b u(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right\| = \\
&= \left\|\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} u(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t_2}^{t_2+\varepsilon} u(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right\| \le \\
&\le \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} \|u(t)\|\,\mathrm{d}t + \int_{t_2}^{t_2+\varepsilon} \|u(t)\|\,\mathrm{d}t \to 0 \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Dies liefert

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(s)\,\mathrm{d}s \;=\; 0 \quad \forall\, t \in (a,b),\ 0 < h < b-t.$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus Satz 1.6. ■

2 Die Räume $L^p(a,b;X)$

Sei $I =]a,b[$ $(-\infty \le a < b \le +\infty)$, X Bannach-Raum.

Definition 2.1 Sei $1 \le p \le \infty$. Mit $L^p(a,b;X)$ bezeichnen wir den Vektorraum aller (Klassen) Bochner- meßbarer Funktionen $u : (a,b) \to X$, so daß

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_a^b \|u(t)\|_X^p \, \mathrm{d}t \right)^{1/p} < \infty & \text{für } \; 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{(a,b)} \|u(t)\|_X \quad < \infty & \text{für } \; p = \infty. \end{cases}$$

Satz 2.2 1. *$L^p(a,b;X)$ ist ein normierter Raum.*
2. *Ist X ein Banach-Raum, so ist $L^p(a,b;X)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^p(a,b;X)}$ ein Banach-Raum.*
3. *Ist X ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$, so ist $L^2(a,b;X)$ ein Hilbert-Raum bez. des Skalarproduktes*

$$(u,v)_{L^2(a,b;X)} := \int_a^b (u(t),v(t)) \, \mathrm{d}t \quad (u,v \in L^2(a,b;X)).$$

Satz 2.3 *Sei $-\infty < a < b < +\infty$.*
1. *Sei $u \in L^\infty(a,b;X)$. Dann: $u \in L^p(a,b;X)$ $\forall p \in [1,+\infty[$ und*

$$(*) \qquad \lim_{p\to\infty} \|u\|_{L^p(a,b;X)} = \|u\|_{L^\infty(a,b;X)}.$$

2. *Sei $u \in L^p(a,b;X)$ $\forall p \in [1,+\infty[$ mit*

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} \le C_0 = const. \quad \forall p \in [1,+\infty[.$$

Dann ist $u \in L^\infty(a,b;X)$ und es gilt $(*)$.

Dichte Teilmengen

Satz 2.4 *Sei X_0 dicht in X, sei $\mathcal{M}$ dicht in $L^p(a,b;\mathbb{R})$ $(1 \le p < +\infty; -\infty < a < b < +\infty)$. Dann ist*

$$\operatorname{span}\{\varphi(t)x \,|\, \varphi \in \mathcal{M}, x \in X_0\}$$

dicht in $L^p(a,b;X)$.

BEWEIS. - Sei $u \in L^p(a,b;\mathbb{R})$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es existiert eine einfache Funktion $u_\varepsilon(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} \chi_{A_k}(t) x_k$ mit $\|u - u_\varepsilon\|_{L^p(a,b;X)} \leq \varepsilon/3$;

$$\exists x_{0k} \in X_0 : \quad (b-a)^{1/p} \sum_{k=1}^{m} \|x_k - x_{0k}\| \leq \frac{\varepsilon}{3};$$

$$\exists \varphi_k \in \mathcal{M} : \quad \sum_{k=1}^{m} \|x_{0k}\| \|\chi_{A_k} - \varphi_k\|_{L^p(]a,b[)} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned}
&\Big\| u_\varepsilon - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k x_{0k} \Big\|_{L^p(a,b;X)} \leq \\
&\leq \Big\| \sum_{k=1}^{m} \chi_{A_k}(x_k - x_{0k}) \Big\|_{L^p(a,b;X)} + \Big\| \sum_{k=1}^{m} (\chi_{A_k} - \varphi_k) x_{0k} \Big\|_{L^p(a,b;X)} \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} |A_k|^{1/p} \|x_k - x_{0k}\| + \sum_{k=1}^{m} \|x_{0k}\| \|\chi_{A_k} - \varphi_k\|_{L^p(]a,b[)} \leq \frac{2\varepsilon}{3}. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

FOLGERUNG 2.5 *X separabel. Dann ist $L^p(a,b;X)$ $(1 \leq p < +\infty)$ separabel.*

Beispiel Sei $1 \leq p, q < +\infty$. $X = L^p(\Omega)$. Dann ist

$$\operatorname{span}\{\varphi(t) f(x) \mid \varphi \in \mathcal{D}(I),\ f \in \mathcal{D}(\Omega)\}$$

dicht in $L^p(a,b;L^q(\Omega))$.

Anwendung *$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, beschränkt; $Q := \Omega \times]a,b[$. Es existiert eine Isometrie ϕ : $L^p(Q) \to L^p(a,b;L^p(\Omega))$.*

BEWEIS. - Sei $u \in C(\overline{\Omega})$. Setzen

$$\phi(u)(t) := u(\cdot, t) \in L^p(\Omega) \quad \forall\, t \in]a,b[.$$

Mit Hilfe von Fubini bekommen wir

$$\|\phi(u)\|^p_{L^p(a,b;L^p(\Omega))} = \int_a^b \|\phi(u)(t)\|^p_{L^p(\Omega)} \,\mathrm{d}t = \int_Q |u|^p \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t.$$

Also ist ϕ auf einer dichten Teilmenge von $L^p(Q)$definiert und dort eine Isometrie. Diese kann man auf eindeutige Weise auf $L^p(Q)$ fortsetzen. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß ϕ surjektiv ist. Dies folgt aber aus der Tatsache, daß

$$\operatorname{span}\{\varphi f \mid \varphi \in \mathcal{D}(I); f \in \mathcal{D}(\Omega)\} \subset \phi(C(\overline{\Omega})),$$

was nach Satz 2.4 impliziert, daß $\phi(C(\overline{\Omega}))$ in $L^p(a, b; L^p(\Omega))$ dicht ist. ∎

SATZ 2.6 *Sei* $-\infty < a < b < +\infty$. *Sei* $u \in L^p(a, b; X)$ $(1 \leq p < +\infty)$. *Dann existiert für jedes* $\varepsilon > 0$ *eine Treppenfunktion* $u_\varepsilon : I \to X$, *so daß*

$$\|u - u_\varepsilon\|_{L^p(a,b;X)} \leq \varepsilon.$$

BEWEIS. - 1. *Die Menge der einfachen Funktionen sind dicht in* $L^p(a, b; X)$: Sei $u \in L^p(a, b; X)$. Dann ist $u : I \to X$ Bochner- integr. Sei (u_j) approximierende Folge für u. Setzen

$$v_j(t) := \begin{cases} u_j(t) & \text{falls} \quad \|u_j(t)\| \leq 2\|u(t)\| \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist v_j einfach, und es gilt: $v_j(t) \to u(t)$, $\|v_j(t) - u(t)\|^p \leq 3\|u(t)\|^p$ ffa. $t \in I$. Nach dem Satz von Lebesgue folgt

$$\int_I \|v_j(t) - u(t)\|^p \, \mathrm{d}t \to 0 \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

2. *Approximation einer charakteristischen Funktion durch Treppenfunktion*: Sei $A \in \mathcal{L}(I)$ und sei $\delta > 0$ beliebig. Dann existiert eine kompakte Menge $K \subset A : |A \setminus K|^{1/p} \leq \delta/2$ und eine offene Menge U mit $K \subset U \subset\subset I$ und $|U \setminus K|^{1/p} \leq \delta/2$, so daß

$$U = \bigcup_{k=1}^{k_0}]a_k, b_k[\quad ([a_k, b_k] \cap [a_l, b_l] = \emptyset, k \neq l).$$ [2)]

Offensichtlich ist dann χ_U eine Treppenfunktion und es gilt:

$$\begin{aligned} \|\chi_U - \chi_A\|_{L^p(]a,b[)} &\leq \|\chi_U - \chi_K\|_{L^p(]a,b[)} + \|\chi_K - \chi_A\|_{L^p(]a,b[)} \leq \\ &\leq |U \setminus K|^{1/p} + |A \setminus K|^{1/p} \leq \delta. \end{aligned}$$

[2)] Sei $V \subset\subset I$ offen, so daß $K \subset V$. Dann existiert für jedes $t \in K$ ein offenes Intervall $I_t \subset V$, welches t enthält. Da K kompakt ist, existieren $t_k \in K$ $(k = 1 \ldots, k_0)$, so daß $K \subset U := \bigcup_{k=1}^{k_0} I_{t_k} \subset V$.

3. Sei $u \in L^p(a,b;X)$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach 1. existiert eine einfache Funktion $v = \sum\limits_{k=1}^{m} \chi_{A_k}(t)x_k$ mit $\|u-v\|_{L^p(a,b;X)} \leq \varepsilon/2$. Nach 2. existieren Treppenfunktionen $\varphi_k : I \to \mathbb{R}$, so daß

$$\|\chi_{A_k} - \varphi_k\|_{L^p(]a,b[)} \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2m\|x_k\|} \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Dann ist $u_\varepsilon := \sum\limits_{k=1}^{m} \varphi_k x_k$ eine Treppenfunktion und es gilt:

$$\begin{aligned}\|u - u_\varepsilon\|_{L^p(a,b;X)} \;&\leq\; \|u - v\|_{L^p(a,b;X)} + \|v - u_\varepsilon\|_{L^p(a,b;X)} \\ &\leq\; \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{m} \|x_k\| \|\chi_{A_k} - \varphi_k\|_{L^p(]a,b[)} \;\leq\; \varepsilon.\end{aligned}$$

Mittelfunktionen und Steklov-Mittel

Sei $\omega \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit

1. $\omega(t) \;=\; 0 \quad \forall\, |t| \geq 1,$
2. $\omega(t) \;=\; \omega(-1) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \omega \,\mathrm{d}t \;=\; 1.$

Beispiel

$$\omega(t) := \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-t^2}} & \text{für} \quad |t| < 1, \\ 0 & \text{für} \quad |t| \geq 1. \end{cases}$$

Setzen $\omega_n := n\omega(nt)$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\omega_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}(\omega_n) \subset [-1/n, 1/n]$,

$$\int_{\mathbb{R}} \omega_n \,\mathrm{d}t \;=\; \int_{\mathbb{R}} \omega \,\mathrm{d}t \;=\; 1.$$

Sei $u \in L^p(a,b;X)$ $(1 \leq p < +\infty)$; u durch Null auf $\mathbb{R}$ fortsetzen. Setzen

$$u_n(t) := u * \omega_n(t) = \int_{\mathbb{R}} \omega_n(t-s)u(s) \,\mathrm{d}s \;=\; \omega_n(s)u(t-s)ds.$$

SATZ 2.7 *Es gilt:*

1. $u_n \in C^\infty(\mathbb{R}; X) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

2. $\|u_n\|_{L^p(a,b;X)} \;\le\; \|u\|_{L^p(a,b;X)} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$;

3. $\|u_n - u\|_{L^p(a,b;X)} \to 0 \quad$ *für* $\quad n \to \infty$;

4. $u_{n_j}(t) \to u(t)$ *in* X *ffa.* $t \in]a,b[$.

BEWEIS. - 1. Sei $h > 0$ beliebig. Dann gilt:

$$\frac{1}{h}(\omega_n(t+h) - \omega_n(t)) \;=\; \omega'_{n(h)}(t).$$

wobei

$$\omega_{n(h)}(t) := \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \omega_n(s)\,\mathrm{d}s \;=\; \int_0^1 \omega_n(t+hs)\,\mathrm{d}s$$

Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von ω'_n folgt für beliebiges $t \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} |\omega'_{n(h)}(t) - \omega'_n(t)| \;&=\; \int_0^1 \omega_n(t+hs) - \omega'_n(t)\,\mathrm{d}s \;\le \\ &\le\; \max_{[0,1]} |\omega'_n(t+hs) - \omega'_n(t)| \to 0 \quad \text{gleichmäßig in} \quad [a,b], \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} &\Big|\frac{(u*\omega_n)(t+h) - (u*\omega_n)(t)}{h} - (u*\omega'_n)(t)\Big| \;= \\ &= \Big|u * \Big(\frac{\omega_n(\cdot+h) - \omega_n(t)}{h}\Big)(t) - (u*\omega'_n)(t)\Big| \;=\; \Big|(u*(\omega'_{n(h)} - \omega'_n))(t)\Big| \;\le \\ &\le\; \|u\|_{L^1(a,b;X)}\|\omega'_{n(h)} - \omega'_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0 \quad \text{für} \quad h \to 0. \end{aligned}$$

Somit ist $(u*\omega_n)' = u*\omega'_n \in C([a,b];X)$. Analog zeigt man $(u*\omega_n)'' = u*\omega''_n \in C([a,b];X)$ usw.

2. Für $t \in]a,b[$ gilt:

$$\begin{aligned} \|(u*\omega_n)(t)\|^p \;&\le\; \left(\int_{\mathbb{R}} |\omega_n(s)|^{1/p'}|\omega_n(s)|^{1/p}\|u(t-s)\|\,\mathrm{d}s\right)^p \;\le \\ &\le\; \|\omega_n\|_{L^1}^{1/p'} \int_{\mathbb{R}} |\omega_n(s)|\|u(t-s)\|^p\,\mathrm{d}s \;\le\; \int_{\mathbb{R}} |\omega_n(s)|\|u(t-s)\|^p\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Hieraus folgt nach Anwendung von Fubini:

$$\int_a^b \|(u*\omega_n)(t)\|^p \,\mathrm{d}x \;\le\; \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\omega_n(s)| \|u(t-s)\|^p \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \;\le\; ^{3)}$$
$$\le\; \|\omega_n\|_{L^1}\|u\|^p_{L^p(a,b;X)} \;\le\; \|u\|^p_{L^p(a,b;X)}.$$

3. $t\in]a,b[$:

$$\begin{aligned}\|u_n(t)-u(t)\|^p \;&=\; \left\|\int_{\mathbb{R}} \omega_n(s)(u(t-s)-u(t))\,\mathrm{d}s\right\|^p \;\le\\ &\le\; \left(\int_{\mathbb{R}}\omega(s)\,\mathrm{d}s\right)^{1/p'} \int_{\mathbb{R}} \omega(s)\|(u(t-s/n)-u(t))\|^p\,\mathrm{d}s \;\le\\ &\le\; \int_{-1}^{1} \omega(s)\|(u(t-s/n)-u(t))\|^p\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Mit Fubini und Absolutstetigkeit des Lebesgue-Integrals. folgt

$$\begin{aligned}\|u_n-u\|^p_{L^p(a,b;\mathbb{R})} \;&\le\; \int_a^b\int_{-1}^{1} \omega(s)\|(u(t-s/n)-u(t))\|^p\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \;=\\ &=\; \int_{-1}^{1}\omega(s)\int_a^b \|(u(t-s/n)-u(t))\|^p\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \;=\\ &\to 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty.\end{aligned}$$

4. Nach dem Satz von Riesz-Fischer existiert eine Teilfolge u_{n_j}, so daß

$$u_{n_j}(t)\to u(t) \quad \text{ffa. } t\in]a,b[. \;\blacksquare$$

DEFINITION 2.8 *Sei $u\in L^p(a,b;X)$. Setzen u durch Null auf $\mathbb{R}$ fort. Für $h\in\mathbb{R}, h\neq 0$ definieren wir das* **Steklov-Mittel**

$$u_h(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_t^{t+h} u(s)\,\mathrm{d}s & \text{falls} \quad h>0\\ \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{t+h}^{t} u(s)\,\mathrm{d}s & \text{falls} \quad h<0.\end{cases}$$

$(t\in]a,b[)$.

3) Wir setzen u durch Null auf $\mathbb{R}$ fort und bezeichnen diese Fortsetzung ebenfalls mit u.

Satz 2.9 *Sei* $u \in L^p(a,b;X)$ $(1 \le p \le +\infty; -\infty \le a < b \le +\infty)$. *Es gilt:*

1. $u_h \in C([a,b];X) \quad \forall\, h > 0;$

2. $\|u_h\|_{L^p(a,b;X)} \le \|u\|_{L^p(a,b;X)};$

3. $u_h \to u$ *in* $\quad L^p(a,b;X)$ *für* $\quad h \to 0.$

4. *Sei* $u \in C(\mathbb{R};X)$ *gleichmäßig stetig. Dann*

$$u_h \to u \quad \text{gleichmäßig für} \quad h \to 0.$$

Bemerkungen (Faltungsintegrale). Sei $1 \le p \le +\infty$. Es gilt:

1. Für alle $u \in L^p(\mathbb{R};X)$ und $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} u * \varphi = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} u(\cdot - s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s \in L^p(\mathbb{R};X); \\ \|u * \varphi\|_{L^p(\mathbb{R};X)} \le \|\varphi\|_{L^1}\|u\|_{L^p(\mathbb{R};X)} \end{cases}$$

2. Für $h > 0$ bezeichne u_h das Steklov-Mittel. Dann

$$u_h * \varphi \;=\; u * \varphi_{-h} \quad \forall\, u \in L^p(\mathbb{R};X), \quad \forall\, \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \quad (h \in \mathbb{R}; h \neq 0).$$

3. Für $u \in L^1(\mathbb{R};X)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ist $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Beweis. - 1. Siehe Beweis von Satz 2.7; 2.

2. Sei $h > 0$. Dann

$$\begin{aligned} u_h * \varphi(t) \;&=\; \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \varphi(t-s)\,\mathrm{d}s \;= \\ &=\; \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} u(s + \tau h)\varphi(t-s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau \;= \\ &=\; \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} u(s)\varphi(t - s - \tau h)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau \;= \\ &=\; \int_{\mathbb{R}} u(s) \frac{1}{-h} \int_{t-s-h}^{t-s} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s \;=\; u * \varphi_{-h}(t). \end{aligned}$$

3. Siehe Beweis von Satz 2.7; 1. ∎

3 Der Raum $W^m_{p,q}(a,b;X,Y)$

Seien X, Y Banach-Räume, wobei X in Y stetig eingebettet sei, d. h. es existiert eine Injektion $i \in \mathcal{L}(X,Y)$, so daß

$$\|i(x)\|_Y \le c_0 \|x\|_X \quad \forall\, x \in X \quad (c_0 = \text{const}).$$

Bemerkung: Ist $u : (a,b) \to X$ Bochner-meßbar, so ist die Abbildung $i(u(\cdot)) : (a,b) \to Y$ ebenfalls Bochner-meßbar.

DEFINITION 3.1 *Seien* $1 \le p, q \le \infty$, $-\infty \le a < b \le +\infty$. *Wir definieren*

$$W^m_{p,q}(a,b;X,Y) := \Big\{ u \in L^p(a,b;X) \,\Big|\, \exists v \in L^q(a,b;Y) : \int_a^b v(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \;=\; (-1)^m \int_a^b i(u(t))\varphi^{(m)}(t)\,\mathrm{d}t \Big\}.$$

Dann heißt $u^{(m)} := v$ ***m-te schwache Ableitung von** u **in** Y.*

Der Raum $W^m_{p,q}(a,b;X,Y)$ versehen mit der Norm

$$\|u\|_{W^m_{p,q}(a,b;X,Y)} := \|u\|_{L^p(a,b;X)} + \|u^{(m)}\|_{L^q(a,b;Y)}$$

ist ein Banachraum. Insbesondere setzen wir $W^m_p(a,b;X) := W^m_{p,p}(a,b;X,X)$.

LEMMA 3.2 *Der Raum*

$$\mathcal{W}(a,b;X) := \begin{cases} \mathcal{D}(\mathbb{R};X) & \textit{falls} \quad a=-\infty, b=+\infty \\ C^\infty_c([a,+\infty);X) & \textit{falls} \quad a\in\mathbb{R}, b=+\infty \\ C^\infty_c((-\infty,b];X) & \textit{falls} \quad a=-\infty, b\in\mathbb{R} \\ C^\infty([a,b];X) & \textit{falls} \quad -\infty<a<b<+\infty \end{cases}$$

ist in $W^m_{p,q}(a,b;X,Y)$ *dicht.*

BEWEIS. - 1. $a=-\infty, b=+\infty$: Sei $u \in W^m_{p,q}(\mathbb{R};X,Y)$ beliebig gewählt. Setzen

$$u_\varepsilon := u * \rho_\varepsilon \quad (\varepsilon > 0).$$

Dann ist $i(u_\varepsilon) \;=\; (i(u))_\varepsilon$ und es gilt:

$$u^{(m)}_\varepsilon \;=\; (i(u))^{(m)}_\varepsilon.$$

Hieraus folgt

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{in} \quad L^p(\mathbb{R};X), \qquad u_\varepsilon^{(m)} \to u^{(m)} \quad \text{in} \quad L^q(\mathbb{R};Y).$$

Es genügt also, Funktionen der Gestalt $v = u * \rho_\varepsilon$ durch Funktionen aus $\mathcal{W}(\mathbb{R};X)$ in $W^m_{p,q}(\mathbb{R};X,Y)$ zu approximieren. Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Sei $\zeta_N \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\zeta_N \equiv 1$ auf $[-N,N]$, $\zeta_N \equiv 0$ in $\mathbb{R} \setminus [-N-1, N+1]$, $|\zeta_N^{(k)}| \le c\,(k = 1, \ldots m; c = \text{const})$. Dann:

$$\begin{cases} \zeta_N v \to v \quad \text{in} \quad L^p(\mathbb{R};X), \quad \zeta_N v^{(m)} \to i(v)^{(m)} \quad \text{in} \quad L^q(\mathbb{R};Y); \\ \zeta_N^{(m-k)} i(v)^{(k)} \to 0 \quad \text{in} \quad L^q(\mathbb{R};Y) \quad (k = 1, \ldots, m) \\ \text{für} \quad N \to +\infty. \end{cases}$$

Die ersten beiden Konvergenzaussagen folgen unmittelbar aus der Absolutstetigkeit des Lebesgue-Integrals. Es bleibt also noch, die dritte zu beweisen. Hierfür beachte man $\operatorname{supp}(\zeta_N^{(m-k)} i(v)^{(k)}) \subset [-N-1, -N] \cup [N, N+1]$ und die Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \|i(v)^{(k)}\|_{L^q(N,N+1;Y)} &\le c\left(\|v^{(k)}\|_{L^p(N,N+1;X)} + \|v^{(k+1)}\|_{L^p(N,N+1;X)}\right), \\ \|i(v)^{(k)}\|_{L^q(-N-1,-N;Y)} &\le c\left(\|v^{(k)}\|_{L^p(-N-1,-N;X)} + \|v^{(k+1)}\|_{L^p(-N-1,-N;X)}\right). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt auch hier aus der Absolutstetigkeit des Lebesgue-Integrals.

2. Die Dichtheitsaussage für die anderen Fälle beweist man mit einer analogen Argumentation wie die obige unter Verwendung geeigneter Fortsetzungen über die Intervallgrenzen hinaus. ■

Definition 3.3 *Eine Funktion* $u : [a,b] \to X$ *heißt* **absolutstetig**, *falls für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *existiert, so daß für jedes endliche System* $(a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m)$ *disjunkter Teilintervalle von* $[a,b]$ *mit* $\sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k) \le \delta$ *gilt:*

$$\sum_{k=1}^{m} \|u(b_k) - u(a_k)\|_X \le \varepsilon.$$

Satz 3.4 *Sei* $u :]a,b[\to X$ *eine Bochner-meßbare Funktion. Die folgenden Aussagen sind dann äquivalent:*

1° $u \in W^1_1(a,b;X)$

2° $\exists \tilde{u}$ mit $\tilde{u}(t) = u(t)$ *ffa.* $t \in]a,b[$, $w \in L^1(a,b;X)$:

$$\tilde{u}(t) \;=\; \tilde{u}(a) + \int_a^t w(s)\,\mathrm{d}s \quad \forall\, t \in [a,b].$$

(d. h.: $\tilde{u}$ ist ein absolutstetiger Vertreter der Äquivalenzklasse u.)

Beweis. - $1^\circ \;\Rightarrow 2^\circ$ Sei $u \in \mathcal{W}(a,b;X)$. Dann existiert ein $t_0 \in [a,b]$:

$$\|u(t_0)\|_X \;=\; \frac{1}{b-a}\int_a^b \|u(s)\|_X\,\mathrm{d}s.$$

Unter Verwendung partieller Integration bekommt man:

$$u(t) \;=\; u(t_0) \;+\; \int_{t_0}^t u'(s)\,\mathrm{d}s,$$

also

$$\max_{t\in[a,b]} \|u(t)\|_X \;\le\; c_0\|u\|_{W_1^1(a,b;X)} \quad \Bigl(c_0 := \max\Bigl\{(b-a)^{-1},1\Bigr\}\Bigr). \tag{3.1}$$

Sei nun $u \in W_1^1(a,b;X)$ beliebig gewählt. Nach Lemma 3.2 existiert eine Folge $(u_j) \subset \mathcal{W}(a,b;X)$, die in $W_1^1(a,b;X)$ gegen u konvergiert. Nach (3.1) ist diese eine Cauchy-Folge in $C([a,b];X)$, die somit gegen ein $\tilde{u} \in C([a,b];X)$ konvergiert. Unter Verwendung des Satzes von Riesz-Fischer folgt: $\tilde{u}(t) = u(t)$ ffa. $t \in (a,b)$. Sei $x^* \in X^*$ beliebig. Wir setzen $\psi_{x^*}(t) := \langle x^*, \tilde{u}(t)\rangle$ $(t \in [a,b])$. Dann folgt für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$:

$$\begin{aligned}\int_a^b \psi_{x^*}(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \;&=\; x^*\Bigl\langle \int_a^b \tilde{u}(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Bigr\rangle \;=\\ &=\; -x^*\Bigl\langle \int_a^b u'(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\Bigr\rangle \;=\; -\int_a^b \langle x^*, u'(t)\rangle\varphi(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Hieraus schließt man $\psi_{x^*} \in W^{1,1}(]a,b[)$ mit $\psi'_{x^*}(t) = \langle x^*, u'(t)\rangle$ $(t \in]a,b[)$. Hieraus schließt man

$$\psi_{x^*}(t) \;=\; \psi_{x^*}(a) \;+\; \int_a^t \langle x^*, u'(s)\rangle\,\mathrm{d}s \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Dies impliziert

$$\Bigl\langle x^*, \tilde{u}(t) - \tilde{u}(a) - \int_a^t u'(s)\,\mathrm{d}s\Bigr\rangle \;=\; 0 \quad \forall\, x^* \in X^*, \forall\, t \in [a,b],$$

was die Aussage 2° nach sich zieht.

$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$: Sei $\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$. Dann bezeichne φ_h $(h>0)$ das Steklov-Mittel von φ. Bekanntlich gilt

$$\varphi'(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \varphi_h'(t) \quad (t\in\mathbb{R}).$$

Unter Verwendung der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral und Satz 2.9; 3. bekommt man:

$$\begin{aligned}\int_a^b \tilde{u}(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t &\overset{Vorauss.}{=} \int_a^b \left(\tilde{u}(a) + \int_a^t w(s)\,\mathrm{d}s\right)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{h\to 0} \int_a^b \int_a^t w(s)\,\mathrm{d}s\varphi_h'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\lim_{h\to 0}\int_a^b w_{-h}(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b w(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Somit ist w die verallgemeinerte Ableitung von u, und es gilt $u \in W_1^1(a,b;X)$. ■

FOLGERUNG 3.5 *Sei Y ein Banach-Raum. Seien $1 \le p,q < \infty; -\infty < a < b < +\infty$. Dann gilt für alle $u \in W^1_{p,q}(a,b;Y,Y)$:*

$$\|u\|_{C([a,b];Y)} \le \frac{1}{(b-a)^{1/p}}\|u\|_{L^p(a,b;Y)} + (b-a)^{1-1/q}\|u'\|_{L^q(a,b;Y)}. \tag{3.2}$$

BEWEIS. - Sei $u \in W^1_{p,q}(a,b;Y,Y)$. Nach Satz 3.4 gibt es einen absolutstetigen Vertreter $\tilde{u} \in u$. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert ein $t_0 \in [a,b]$:

$$\|\tilde{u}(t_0)\| = \frac{1}{b-a}\int_a^b \|\tilde{u}(s)\|\,\mathrm{d}s = \frac{1}{b-a}\int_a^b \|u(s)\|\,\mathrm{d}s.$$

Sei $t \in]a,b[, t \ge t_0$. Dann folgt nach Satz 3.4 mit Hilfe der Dreiecksungleichung und der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}(t)\| &\le \|\tilde{u}(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|u'(s)\|\,\mathrm{d}s = \frac{1}{b-a}\int_a^b \|u(s)\|\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^t \|u'(s)\|\,\mathrm{d}s \le \\ &\le \frac{1}{(b-a)^{1/p}}\|u\|_{L^p(a,b;Y)}\,\mathrm{d}s + (b-a)^{1-1/q}\|u'\|_{L^q(a,b;Y)}.\end{aligned}$$

Analog zeigt man, daß für jedes $t \in]a,b[, t \le t_0$ gilt:

$$\|\tilde{u}(t)\| \le \frac{1}{(b-a)^{1/p}}\|u\|_{L^p(a,b;Y)}\,\mathrm{d}s + (b-a)^{1-1/q}\|u'\|_{L^q(a,b;Y)}.$$

Dies bestätigt die Behauptung (3.2). ■

Satz 3.6 *Sei $p \in [1, +\infty]$; $q \in (1, +\infty)$ und Y reflexiv; $q = +\infty$ und Y reflexiv und separabel. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

i) $u \in W^1_{p,q}(a, b; X, Y)$.

ii) $u \in L^p(a, b; X)$;

$$1 < p < +\infty : \quad \int_a^{b-h} \|j(u(t+h)) - j(u(t))\|_Y^q \,\mathrm{d}t \le C_1 h^q$$

$$\forall\, 0 < h < b-a, \quad C_1 = \text{const} > 0$$

$$q = +\infty : \quad \operatorname*{ess\,sup}_{t \in (a, b-h)} \|j(u(t+h)) - j(u(t))\|_Y \le C_2 h$$

$$\forall\, 0 < h < b-a, \quad C_2 = \text{const} > 0$$

iii) $u \in L^p(a, b; X)$;

$$\int_a^b \langle v'(t), j(u(t))\rangle_Y \, ddt \le C\|v\|_{L^{q'}(a,b;Y^*)} \quad \forall\, v \in \mathcal{D}((a,b), Y^*),$$

wobei $q' = \dfrac{q}{q-1}$ *für* $1 < q < +\infty$ *und* $q' = 1$ *für* $q = +\infty$.

Beweis. - $(i) \Rightarrow (ii)$. Sei $\tilde{u} : [a, b] \to Y$ eine absolutstetige Funktion gemäß Satz 2.2.1:

$$\tilde{u}(t+h) - \tilde{u}(t) = \int_t^{t+h} u'(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [a, b-h]$$

$$\begin{aligned}\int_a^{b-h} [g(t+h) - g(t)]\,\mathrm{d}t &= \int_{a+h}^{b} g(s)\,\mathrm{d}s - \int_a^{b-h} g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{a+h}^{b-h} g(s)\,\mathrm{d}s + \int_{b-h}^{b} g(s)\,\mathrm{d}s - \int_a^{b-h} g(s)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

g

$1 < q < +\infty$: $\quad g(t) := \int_a^t \|u'(s)\|_Y^q \,\mathrm{d}s, \quad t \in [a, b]$.

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}(t+h) - \tilde{u}(t)\| &\le \int_t^{t+h} \|u'(s)\|\,\mathrm{d}s \le h^{1/q'} \left\{ \int_t^{t+h} \|u'(s)\|_Y^q \,\mathrm{d}s \right\}^{1/q} \\ &= h^{1/q'} [g(t+h) - g(t)]^{1/q}\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\int_a^{b-h} \|j(u(t+h)) - j(u(t))\|_Y^q \,\mathrm{d}t \;\le\; h^{q/q'} \int_a^{b-h} [g(t+h) - g(t)]\,\mathrm{d}t$$
$$\le\; h^{q/q'} \int_{b-h}^{b} g(s)\,\mathrm{d}s \;\le\; h^{q/q'+1} g(b),$$

Beachtet man $\frac{q}{q'} + 1 \;=\; (q-1) + 1 \;=\; q$, so folgt

$$\int_a^{b-h} \|j(u(t+h)) - j(u(t))\|_Y^q \,\mathrm{d}t \;\le\; h^q \int_a^b \|u'(s)\|_Y^q \,\mathrm{d}s. \quad (\text{ gilt auch für } q = 1).$$

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*. Sei $v \in \mathcal{D}((a,b); Y^*)$ beliebig gewählt. ($\mathrm{supp}(v) \subseteq [\alpha, \beta] \subset (a,b); 0 < h < \min\{\alpha - a, b - \beta\}$)

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \langle v(t) - v(t-h), j(u(t))\rangle_Y \,\mathrm{d}t \\
&\quad= \int_\alpha^\beta \langle v(t), j(u(t))\rangle_Y \,\mathrm{d}t - \int_{\alpha+h}^{\beta+h} \langle v(t-h), j(u(t))\rangle_Y \,\mathrm{d}t \\
&\quad= \int_\alpha^\beta \langle v(t), j(u(t))\rangle_Y \,\mathrm{d}t - \int_\alpha^\beta \langle v(t), j(u(t+h))\rangle_Y \,\mathrm{d}t \\
&\quad= \int_a^{b-h} \langle v(t), j(u(t)) - j(u(t+h))\rangle_Y \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$v \in \mathcal{D}((a,b); Y^*) : \quad v(t) - v(t-h) \;=\; \int_{t-h}^t v'(s)\,\mathrm{d}s$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{h}\langle v(t) - v(t-h), u(t)\rangle_Y\right| \;&=\; \frac{1}{h}\left|\left\langle \int_{t-h}^t v'(s)\,\mathrm{d}s, u(t)\right\rangle\right| \\
&\le\; \frac{1}{h}\int_{t-h}^t \|v'(s)\|_{Y^*}\,\mathrm{d}s \cdot \|u(t)\|_Y \\
&\le\; \Big(\max_{\tau \in (a,b)} \|v'(\tau)\|_{Y^*}\Big)\|u(t)\|_Y \quad \text{summierbare Majorante}
\end{aligned}$$

ffa. $t \in (a,b), \quad \forall\, 0 < h < \min\{\alpha - a, b - \beta\}$.

Ferner

$$\frac{1}{h}\langle v(t) - v(t-h), u(t)\rangle_Y \to \langle v'(t), u(t)\rangle_Y \quad \text{ffa. } t \in (a,b)$$

Damit:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^b \langle v(t)-v(t-h),u(t)\rangle_Y\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b \langle v'(t),u(t)\rangle_Y\,\mathrm{d}t.$$

$1<q<+\infty$:

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_a^b \Big\langle \frac{1}{h}[v(t)-v(t-h)], j(u(t))\Big\rangle_Y\,\mathrm{d}t\Big| \\
&\le \frac{1}{h}\Big\{\int_a^{b-h}\|v(t)\|_{Y^*}^{q'}\,\mathrm{d}t\Big\}^{1/q'}\Big\{\int_a^{b-h}\|j(u(t+h))-j(u(t))\|_Y^{q}\,\mathrm{d}t\Big\}^{1/q} \\
&\le C_1^{1/q}\|v\|_{L^{q'}(a,b;Y^*)},\quad h\to 0 \Rightarrow \text{ Behauptung.}
\end{aligned}$$

$(iiI)\Rightarrow(i)$. Definieren

$$u_n(t) := \int_{\mathbb{R}} \rho_n(t-s)u(s)\,\mathrm{d}s,\quad t\in[a,b]\quad (n=1,2,\ldots)$$

$(u(s)=0\quad \forall\, s\in\mathbb{R}\setminus[a,b])$, vgl. Abschnitt 2.1.
Sei $v\in\mathcal{D}((a,b);Y^*)$; $\quad\operatorname{supp}(v)\subseteq[\alpha,\beta]\subset(a,b)$. Dann

$$\begin{aligned}
\int_a^b \langle v(t),u_n'(t)\rangle_Y\,\mathrm{d}t &= \int_a^b \Big\langle v(t),\int_{\mathbb{R}}\rho_n'(t-s)j(u(s))\,\mathrm{d}s\Big\rangle_Y\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b\Big[\int_a^b \langle v(t),\rho_n'(t-s)j(u(s))\rangle_Y\,\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b\Big\langle\int_a^b v(t)\rho_n'(t-s)\,\mathrm{d}t, j(u(s))\Big\rangle_Y\,\mathrm{d}s \\
&\overset{\text{p.I.}}{=} -\int_a^b\Big\langle\int_a^b v'(t)\rho_n(t-s)\,\mathrm{d}t, j(u(s))\Big\rangle_Y\,\mathrm{d}s \\
&= -\int_a^b \langle v_n'(s), j(u(s))\rangle_Y\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Damit

$$\begin{aligned}
\int_a^b \langle v(t),u_n'(t)\rangle_Y\,\mathrm{d}t &= -\int_a^b \langle v_n', j(u(t))\rangle_Y\,\mathrm{d}t \\
&\overset{Vorauss.(iii)}{\le} C\,\|v_n\|_{L^{q'}(a,b;Y^*)} \\
&\le C\,\|v\|_{L^{q'}(a,b;Y^*)}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$
\begin{aligned}
\|u_n'\|_{L^q(a,b;Y)} &= \sup_{\substack{v\in\mathcal{D}((a,b);Y^*),\\ \|v\|_{L^{q'}(a,b;Y^*)}\le 1}} \int_a^b \langle v(t), u_n'(t)\rangle_Y \,\mathrm{d}t \\
&\le C, \quad n = 1,2,\dots
\end{aligned}
$$

$1 < q < +\infty: \quad \exists\{u_{n_j}'\} \subset \{u_n'\}: \quad u_{n_j}' \rightharpoonup w$ in $L^q(a,b;Y)$ für $j \to \infty$. (denn $L^q(a,b;Y)$ ist reflexiv);

$q = +\infty: \quad \exists\{u_{n_k}'\} \subset \{u_n'\}: \quad u_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} w$ in $L^\infty(a,b;Y)$, denn $L^\infty(a,b;Y) \cong (L^1(a,b;Y^*))^*$. [4)]

Anmerkung 3.7 $\quad \Rightarrow \quad u' = w, \quad u \in W^1_{p,\,q}(a,b;X,Y)$.

Folgerung 3.8 *Seien $p \in [1,+\infty], q \in (1,+\infty)$ und Y reflexiv. Sei $u \in L^p(a,b;X)$ und*

$$
\int_a^{b-h} \|j(u(t+h)) - j(u(t))\|_Y^q \,\mathrm{d} \le C_1 h^q
$$
$$
\forall\, h \in (a,b) \quad (C_1 = const. > 0)
$$

Dann existiert $u' \in L^q(a,b;Y)$ und es gilt

$$
\int_a^b \|u'(t)\|_Y^q \,\mathrm{d}t \le C_1.
$$

Beweis. - Die Existenz von $u' \in L^q(a,b;Y)$ folgt aus Satz 3.6, also: $u \in W^1_{p,\,q}(a,b;X,Y)$. Mit Hilfe von Folgerung 3.8 erhält man

$$
\lim_{h\to 0} \int_a^{b-h} \left\| \frac{1}{h}[j(u(t+h)) - j(u(t))] - u'(t) \right\|_Y^q \mathrm{d}t = 0
$$

Satz 3.9 *Sei $-\infty < a < b < +\infty$, $1 \le p, q < +\infty$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent*

1° $\quad u \in W^1_{p,q}(a,b;X,Y)$;

2° $\quad u \in L^p(a,b;X); \quad \exists\, w \in L^q(a,b;Y)$, so daß

$$
\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \int_a^{b-h} \left\| \frac{1}{h}\left[\iota(u(t+h) - u(t)) - w(t)\right] \right\|_Y^q \mathrm{d}t = 0.
$$

[4)] Y^* ist separabel $\Rightarrow L^1(a,b;Y^*)$ ist separabel. Benutze schwache$*$ Folgen-Kompaktheit beschränkter Mengen (Banach-Alaoglou).

Beweis. - $1° \Rightarrow 2°$ Sei $\tilde{u} : [a,b] \to Y$ die absolutstetige Funktion gemäß Satz 2.5.5. Dann

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t+h) - \tilde{u}(t) \;&=\; \int_t^{t+h} w(s)\,\mathrm{d}s \;=\; \int_0^h w(s+t)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [a, b-h] \\ \tilde{u}(t) \;&=\; \iota(u(t)) \quad \text{ffa. } t \in [a,b]; \quad \tilde{u} \in \iota(u)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Big\| \frac{1}{h}\Big[\iota(u(t+h) - u(t)) - w(t)\Big]\Big\|_Y \;=\; \Big\|\frac{1}{h}\int_0^h (w(s+t) - w(t))\,\mathrm{d}s\Big\|_Y \\ &\leq \frac{1}{h}\int_0^h \|(w(s+t) - w(t))\|_Y\,\mathrm{d}s \\ &\leq h^{1/q'-1}\Big(\int_0^h \|(w(s+t) - w(t))\|_Y^q\,\mathrm{d}s\Big)^{1/q}\text{[5]}\end{aligned}$$

Aus der obigen Abschätzung folgt

$$\begin{aligned}&\int_a^{b-h} \|\frac{1}{h}\Big(\tilde{u}(t+h) - \tilde{u}(t)\Big) - w(t)\Big\|_Y^q\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{h}\int_a^{b-h}\Big(\int_0^h \|(w(s+t) - w(t))\|_Y^q\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{h}\int_0^h\Big(\int_a^{b-h} \|(w(s+t) - w(t))\|_Y^q\,\mathrm{d}st\Big)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Als nächstes setzen wir w durch Null auf $\mathbb{R} \setminus [a,b]$ fort: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

$$\int_a^b \|w(t+s) - w(t)\|_Y^q\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b \|w_s(t) - w(t)w(t)\|_Y^q\,\mathrm{d}t \;\leq\; \varepsilon$$

$\forall\, 0 < s \leq \delta_0 \;=\; \delta_0(\varepsilon)$. Hieraus folgt

$$\frac{1}{h}\int_0^h\Big(\int_a^{b-h} \|(w(s+t) - w(t))\|_Y^q\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}s \;\leq\; \varepsilon \quad \forall\, 0 < s \leq \delta_0.$$

$2° \Rightarrow 1°$ Sei $\varphi \in C_\mathrm{c}^\infty(]a,b[)$ beliebig gewählt $\Rightarrow$ $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [\alpha,\beta] \subset]a,b[; 0 < h < \min\{\alpha - a, b - \beta\}$. Dann

---

[5] $\dfrac{1}{q'} - 1 = \dfrac{1}{q}$.

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \iota(u(t))[\varphi(t-h)-\varphi(t)]\,\mathrm{d}t\\
&= \int_{\alpha-h}^{\beta+h} \iota(u(t))\varphi(t-h)\,\mathrm{d}t - \int_\alpha^\beta \iota(u(t))\varphi(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_\alpha^\beta \iota(u(s+h))\varphi(s)\,\mathrm{d}s - \int_\alpha^\beta \iota(u(t))\varphi(t)\,\mathrm{d}t\\
&\overset{\text{in } Y}{=} \int_a^{b-h} \iota(u(t+h)-u(t))\varphi(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Hiermit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&-\int_a^b \iota(u(t))\cdot\frac{1}{-h}[\varphi(t-h)-\varphi(t)]\,\mathrm{d}t\\
&= \int_a^{b-h} \Big\{\frac{1}{h}\iota(u(t+h)-u(t)) - w(t)\Big\}\varphi(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \int_a^{b-h} w(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Nach $h \to 0$ findet man

$$
-\int_a^b \iota(u(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \overset{1^\circ}{=} \int_a^b w(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad u' = w.
$$

■

Satz 3.10 *Seien* $-\infty < a < b < +\infty; 1 \le p < +\infty; 1 < q < +\infty$ *und* Y *reflexiv;* $q = +\infty$ *und* Y *reflexiv und separabel. Die folgenden Aussagen sind äquivalent*

1° $\quad u \in W^1_{p,q}(a,b;X,Y)$;

2° $\quad u \in L^p(a,b;X)$ und

$$
\begin{aligned}
1 < q < +\infty: &\quad \int_a^{b-h} \|\iota(u(t+h)-u(t))\|_Y^q\,\mathrm{d}t \;\le\; C_1 h^q \quad \forall\, 0 < h < b-a,\\
q = +\infty: &\quad \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b-h]} \|\iota(u(t+h)-u(t))\|_Y \;\le\; C_2 h \quad \forall\, 0 < h < b-a,
\end{aligned}
$$

$(C_1, C_2 = \text{const})$.

3° $\quad u \in L^p(a,b;X)$ *und*

$$
\left|\int_a^b \langle v'(t), \iota(u(t))\rangle\,\mathrm{d}t\right| \;\le\; C\,\|v\|_{L^{q'}(a,b;Y^*)}
$$

$\forall\, v \in C_c^\infty(]a,b[;Y^*)$

insbes.: $q = 2, \quad Y \;=\; \text{Hilbert-Raum} \quad \Rightarrow \quad Y^* \cong Y$

$$\ldots \;\le\; C\,\|v\|_{L^2(a,b;Y)}.$$

4 Spezialfall $X \subset H$ stetig, dicht; $Y = X^*$

Es sei $(H, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbert-Raum mit Norm $|\cdot| := (\cdot,\cdot)^{1/2}$. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum, der stetig und dicht in H eingebettet ist. Identifiziert man H^* mit H vermöge des Rieszschen Darstellungsoperators Λ, so erhält man die stetigen und dichten Einbettungen:

$$j : X \xrightarrow{i} H \xrightarrow{\Lambda^{-1}} H^* \xrightarrow{i^*} X^*.$$

Nach Voraussetzung existiert eine Konstante c_0:

$$(4.1) \qquad |i(x)| \le c_0\|x\|, \quad \|j(x)\|_* \le c_0^2\|x\| \quad \forall\, x \in X.$$

Dann:

$$(4.2) \qquad |i(x)|^2 \;=\; (i(x), i(x)) \;=\; \langle j(x), x\rangle \;\le\; \|j(x)\|_*\|x\| \quad \forall\, x \in X.$$

Satz 4.1 *Sei $1 \le p < +\infty$, $-\infty < a < b < +\infty$. Dann:*

1. $W^1_{p,p'}(a,b;X,X^*) \subset C([a,b];H)$, d. h.

$$\begin{cases} \forall\, u \in W^1_{p,p'}(a,b;X,X^*) \quad \exists \tilde u \in C([a,b];H) : \tilde u(t) \;=\; i(u(t)) \quad \textit{ffa. } t \in]a,b[, \\ \|\tilde u\|_{C([a,b];H)} \;\le\; c_1\|i(u)\|_{W^1_{p,p'}(a,b;X,X^*)} \quad (c_1 = \mathit{const} > 0). \end{cases}$$

2. *Für alle $u, v \in W^1_{p,p'}(a,b;X,X^*)$ und $s,t \in [a,b]$ gilt:*

$$(4.3) \qquad \int_s^t \langle u'(\tau), v(\tau)\rangle \,\mathrm{d}\tau + \int_s^t \overline{\langle v'(\tau), u(\tau)\rangle} \,\mathrm{d}\tau \;=\; (\tilde u(t), \tilde v(t)) - (\tilde u(s), \tilde v(s)).$$

Beweis. - 1°) Sei $u \in C^\infty([a,b];X)$. Dann ist $|i \circ u|^2 \in C^\infty([a,b];H)$ mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(|i\circ u|^2\Big)(t) \;=\; 2\,\mathrm{Re}(i(u'(t)),i(u(t))) \quad \forall\, t\in]a,b[.$$

Die Ungleichung (3.2) (mit $p=q=1$, $Y=H$) liefert nun

$$\|i\circ u\|^2_{L^\infty(a,b;H)} \;\le\; \frac{1}{b-a}\int_a^b |i(u(s))|^2\,\mathrm{d}s \;+\; 2\int_a^b |(i(u'(s)),i(u(s)))|\,\mathrm{d}s.$$

Verwendet man die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und anschließend (4.2), so folgt

$$\begin{aligned}\|i\circ u\|^2_{L^\infty(a,b;H)} \;\le\; &\frac{1}{(b-a)^{1/p}}\|u\|_{L^p(a,b;X)}\|j\circ u\|_{L^\infty(a,b;X^*)} \;+\\ &+\; 2\|u\|_{L^p(a,b;X)}\|j\circ u'\|_{L^{p'}(a,b;X^*)}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe von (3.2) (mit $q=p'$, $Y=X^*$) und (4.1) ergibt sich

$$\|j\circ u\|_{L^\infty(a,b;X^*)} \;\le\; \frac{c_0^2}{(b-a)^{2/p}}\|u\|_{L^p(a,b;X^*)} \;+\; (b-a)^{1/p}\|j\circ u'\|_{L^{p'}(a,b;X^*)}.$$

Kombiniert man die letzten beiden Ungleichungen, so folgt

$$\begin{aligned}\|i\circ u\|^2_{L^\infty(a,b;H)} \;&\le\; \frac{c_0^2}{(b-a)^{2/p}}\|u\|^2_{L^p(a,b;X)} \;+\; 3\|u\|_{L^p(a,b;X)}\|j\circ u'\|_{L^{p'}(a,b;X^*)} \;\le\\ &\le\; c_1^2\|u\|^2_{W^1_{p,p'}(a,b;X,X^*)},\end{aligned}\tag{4.4}$$

wobei

$$c_1 := \max\left\{\frac{c_0}{(b-a)^{1/p}}+2,1\right\}.$$

2°) Nun sei $u\in W^1_{p,p'}(a,b;X,X^*)$ beliebig gewählt. Nach Lemma 3.2 existiert eine Folge $(u_k)\subset C^\infty([a,b];X)$ die in $W^1_{p,p'}(a,b;X,X^*)$ gegen u konvergiert. Nach (4.4) ist die Folge $(i\circ u_k)$ eine Cauchy-Folge in $C([a,b];H)$ und konvergiert somit gegen ein $\tilde u\in C([a,b];H)$. Außerdem haben wir unter Verwendung von (4.2)

$$\|i\circ u_k - i\circ u\|_{L^p(a,b;H)} \;\le\; c_0\|u_k-u\|_{L^p(a,b;X)} \to 0.$$

Nach dem Satz von Riesz-Fischer existiert somit eine Teilfolge (u_{k_l}), welche fast überall gegen $i\circ u$ konvergiert, was impliziert, daß $i(u(t))=\tilde u(t)$ ffa. $t\in]a,b[$.

3°) Seien $u, v \in W^1_{p,p'}(a, b; X, X^*)$. Seien $(u_k), (v_k) \subset C^\infty([a, b]; X)$ Folgen mit

$$u_k \to u, \quad v_k \to v \quad \text{in} \quad W^1_{p,p'}(a, b; X, X^*) \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Dann gilt für alle $a \leq s < t \leq b$ und $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\int_s^t \langle j \circ u_k'(\tau), v_k(\tau)\rangle \,\mathrm{d}\tau + \int_s^t \overline{\langle j \circ v_k'(\tau), u_k(\tau)\rangle} \,\mathrm{d}\tau = \\
&\quad = \int_s^t (i \circ u_k'(\tau), i \circ v_k(\tau)) \,\mathrm{d}\tau + \int_s^t \overline{(i \circ v_k'(\tau), i \circ u_k(\tau))} \,\mathrm{d}\tau = \\
&\quad = (i \circ u_k(t), i \circ v_k(t) - (i \circ u_k(s), i \circ v_k(s).
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar nach Ausführung des Grenzüberganges $k \to +\infty$.

■