Bemerkungen zum Problem der Brachistochrone

Seien $x_1, x_2 > 0$ fixiert. Wir definieren:

$$\mathcal{M} := \left\{ u \in C([0,x_1]) \cap C^1(]0,x_1]) \,\middle|\, u(0) = 0, u(x_1) = y_1, u(x) > 0 \quad \forall\, x \in]0,x_1], \right.$$
$$\left. \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}\,\mathrm{d}t \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{x_1} \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}\,\mathrm{d}t \text{ existiert in } \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathcal{F}(u) := \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}\,\mathrm{d}t, \quad u \in \mathcal{M}.$$

Das Funktional $\mathcal{F}$ unterscheidet sich vom Funktional des Problems der Brachistochrone nur um einen konstanten Faktor.

Für die folgenden Betrachtungen benötigen wir den Raum

$$\widehat{C}^1(]0,x_1]) := \left\{ v \in C^1([0,x_1]) \,\middle|\, v(x_1) = 0,\ \exists\, a \in]0,x_1[:\ v(t) = 0\, \forall\, t \in [0,a] \right\}$$

(die Zahl $a \in]0,x_1[$ hängt dabei von v ab).

SATZ 1 *Sei $u_0 \in \mathcal{M}$ Minimalelement für $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{M}$:*

$$(*) \qquad \mathcal{F}(u) \geq \mathcal{F}(u_0) \quad \forall\, u \in \mathcal{M}.$$

Dann gilt:

1. $$\delta\mathcal{F}(u_0; v) \;=\; \int_0^{x_1} \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+u_0'^2}{u_0^3}}\,v + \frac{u_0'}{\sqrt{u_0(1+u_0'^2)}}\,v' \right) \mathrm{d}t \;=\; 0\ \forall\, v \in \widehat{C}^1([0,x_1]);$$

2. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{u_0'}{\sqrt{u_0(1+u_0'^2)}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+u_0'^2}{u_0^3}} \;=\; 0 \quad \forall\, t \in]0,x_1]$$

   (EULERsche Gleichung).

Beweis. - Wir setzen

$$f(x,y) := \sqrt{\frac{1+y^2}{x}}, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Die ersten partiellen Ableitungen von f sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \;=\; -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+y^2}{x^3}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \;=\; \frac{y}{\sqrt{x(1+y^2)}}.$$

Für $v \in C^1([0,x_1])$ definieren wir nun

$$\varphi_t(\lambda) := f\Big(u_0(t) + \lambda v(t), u_0'(t) + \lambda v'(t)\Big), \quad \lambda \in [0,1], t \in]0, x_1].$$

Es folgt

$$f(u_0 + v, u_0' + v') - f(u_0, u_0') \;=\; \varphi_t(1) - \varphi_t(0) \;=\; \int_0^1 \varphi_t'(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

$$(1) \qquad = \int_0^1 \Big[\frac{\partial f}{\partial x}(u_0 + \lambda v, u_0' + \lambda v')v \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(u_0 + \lambda v, u_0' + \lambda v')v'\Big]\,\mathrm{d}\lambda$$

für alle $t \in]0, x_1]$.

Sei $v \in C^1([0, x_1])$ mit $v(t) = 0$ für alle $t \in [0, a]$ (mit einem von v abhängigen $a \in]0, x_1[$). Dann ist die rechte Seite von (1) gleich Null für alle $t \in [0, a]$. Für $s \in \mathbb{R}, s \neq 0$, folgt aus (1) durch Integration über $[a, x_1]$

$$\frac{1}{s}(\mathcal{F}(u_0 + sv) - \mathcal{F}(u_0)) \;=$$
$$= \int_a^{x_1} \int_0^1 \Big[\frac{\partial f}{\partial x}(u_0 + \lambda sv, u_0' + \lambda sv')v \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(u_0 + \lambda sv, u_0' + \lambda sv')v'\Big]\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}t.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung sind Grenzübergang $s \to 0$ und Integration über $[a, x_1] \times [0, 1]$ vertauschbar. Das ergibt

$$\delta\mathcal{F}(u_0; v) \;=\; \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}(\mathcal{F}(u_0 + sv) - \mathcal{F}(u_0)) \;=$$
$$= \int_a^{x_1} \Big[\frac{\partial f}{\partial x}(u_0, u_0')v \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(u_0, u_0')v'\Big]\,\mathrm{d}t.$$

Sei $v \in \widehat{C}^1([0, x_1])$. Dann ist $(u_0 + sv) \in \mathcal{M}$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Aus $(*)$ folgt

$$\frac{1}{s}(\mathcal{F}(u_0 + sv) - \mathcal{F}(u_0)) \geq 0 \quad \forall\, s > 0.$$

Der Grenzübergang $s \to 0$ ergibt $\delta\mathcal{F}(u_0; v) \geq 0$. Ersetzt man v durch $-v$, so folgt schließlich

$$\delta\mathcal{F}(u_0; v) \;=\; 0.$$

2. Sei $\varepsilon \in]0, x_1[$ beliebig. Jede Funktion $v \in C^1([0, x_1])$ mit $v(t) = 0$ für alle $t \in [0, \varepsilon]$, und $v(x_1) = 0$ gehört zu $\widehat{C}^1([0, x_1])$. Mit Hilfe des Fundamental-Lemmas der Variationsrechnung folgt aus Teil 1 des Satzes

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial y}(u_0,u_0') + \frac{\partial f}{\partial x}(u_0,u_0') = 0 \quad \forall\, t \in [\varepsilon, x_1].$$

Das ergibt die Behauptung 2. ∎

Wir notieren einige Eigenschaften eines Minimalelementes $u_0 \in \mathcal{M}$ für $\mathcal{F}$.

SATZ 2.

1. (*Gleichung für ein erstes Integral*) *Es gilt*

$$-\frac{(u_0'(t))^2}{\sqrt{u_0(t)(1+(u_0'(t))^2)}} + \sqrt{\frac{1+(u_0'(t))^2}{u_0(t)}} = C_0 = \mathrm{const} \quad \forall\, t \in]0, x_1].$$

2. $$\lim_{t\to 0}(u_0'(t))^2 = +\infty.$$

3. $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{x_1}\frac{\mathrm{d}t}{u_0} < +\infty,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{x_1}\frac{{u_0'}^2}{\sqrt{u_0(1+{u_0'}^2)}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{x_1}\left(\sqrt{\frac{1+{u_0'}^2}{u_0}} - C_0\right)\mathrm{d}t < +\infty.$$

4. $$u_0'(t) = \sqrt{\frac{C_1 - u_0(t)}{u_0(t)}} \quad \forall\, t \in]0, x_1],$$

wobei

$$C_1 = \frac{1}{C_0^2}.$$

BEWEIS 1. Aus der EULERschen Gleichung folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{{u_0'}^2}{\sqrt{u_0(1+{u_0'}^2)}} + \sqrt{\frac{1+{u_0'}^2}{u_0}}\right) = 0$$

Dies impliziert

$$(2) \qquad -\frac{{u_0'}^2}{\sqrt{u_0(1+{u_0'}^2)}} + \sqrt{\frac{1+{u_0'}^2}{u_0}} = C_0 = \mathrm{const} \quad \forall\, t \in]0, x_1]$$

oder (äquivalent)

$$(3) \qquad 1 = C_0^2 u_0 (1 + {u_0'}^2) \quad \forall\, t \in]0, x_1].$$

Die Konstante C_0 kann z.B. für $t = x_1$ mit Hilfe von $u_0(x_1) = y_1$ und $u_0'(x_1)$ ausgedrückt werden:

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{y_1(1 + (u_0'(x_1))^2)}}.$$

2. Die Aussage (3) ist äquivalent zu

$${u_0'}^2 = \frac{1}{C_0^2 u_0} - 1 \quad \forall\, t \in]0, x_1].$$

Wegen $u_0(0) = 0$ folgt

$$\lim_{t \to 0} (u_0'(t))^2 = \frac{1}{C_0^2} \lim_{t \to 0} \frac{1}{u_0(t)} - 1 = +\infty.$$

3. Aus (3) folgt

$$\frac{1}{u_0} = \frac{1}{C_0} \sqrt{\frac{1 + {u_0'}^2}{u_0}} \quad \forall\, t \in]0, x_1].$$

Nach Voraussetzung ist die Funktion auf der rechten Seite dieser Gleichung im uneigentlichen Sinne R-integrierbar über $]0, x_1]$. Das ergibt die erste Behauptung.

Die zweite Behauptung folgt aus (2).

4. Die Differentialgleichung für u_0 ist äquivalent zu (3). ∎

Wir nehmen nun die in Satz 2/4. hergeleitete Differentialgleichung als Ausgangspunkt, um die Existenz einer Lösung des Minimum- Problems $(*)$ zu beweisen.

Hierbei betrachten wir mit einer noch zu bestimmenden Konstanten $k > 0$ die Differentialgleichung

$$u'(t) = \sqrt{\frac{k - u(t)}{u(t)}}, \quad 0 < t \leq x_1.$$

Dabei müssen u und k so bestimmt werden, daß die Bedingungen $0 < u(t) \leq k$ für alle $t \in]0, x_1]$ und

$$u(0) = 0, \qquad u(x_1) = y_1$$

erfüllt sind.

Trennung der Veränderlichen ergibt

$$t \;=\; \int \sqrt{\frac{u}{k-u}}\,\mathrm{d}u \;+\; C.$$

Die Substitution $u = k \sin^2 \tau$ liefert

$$t \;=\; \frac{k}{2}(2\tau - \sin 2\tau) \;+\; C, \qquad \tau \geq 0.$$

Hierbei muß $C = 0$ gewählt werden, um für $\tau = 0$ den Wert $t = 0$ zu sichern. Die gesuchte Lösung für $(*)$ erhält man also aus der Darstellung

$$\begin{aligned} t \;&=\; \alpha(\tau) := \frac{k}{2}(\tau - \sin \tau) \\ u \;&=\; \beta(\tau) := \frac{k}{2}(\tau - \cos \tau) \end{aligned}$$

Die Kurve $\{(\alpha(\tau), \beta(\tau) \mid \tau \in [0, 2\pi]\}$ beschreibt einen Bogen einer Zykloide. Nun bestimmen wir τ_1 (und dann k) so, daß

$$x_1 \;=\; \alpha(\tau_1), \quad y_1 \;=\; \beta(\tau_1)$$

gilt. Der Zykloiden-Bogen erreicht seinen „tiefsten Punkt“bei $\tau = \pi$. Daher muß τ_1 zum Intervall $]0, \pi]$ gehören.

Um die Existenz und Eindeutigkeit von τ_1 zu beweisen betrachten wir die Funktion

$$\varphi(\tau) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \tau = 0 \\ \dfrac{\tau - \sin \tau}{1 - \cos \tau} & \text{für} \quad 0 < \tau \leq \pi. \end{cases}$$

Wegen $\lim\limits_{\tau \to 0} \varphi(\tau) = 0$ ist φ stetig auf $[0, \pi]$. Für die Ableitung von φ gilt

$$\begin{aligned} \varphi'(\tau) \;&=\; \frac{2(1-\cos\tau) - \tau \sin \tau}{(1-\cos\tau)^2} \;=\; \frac{1}{(\sin\frac{\tau}{2})^2} \;-\; \frac{\tau \sin \tau}{4(\sin\frac{\tau}{2})^4} \\ &=\; \frac{1}{(\sin\frac{\tau}{2})^2} \;-\; \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\tau}{2}}{(\sin\frac{\tau}{2})^3} \\ &=\; \frac{\cos\frac{\tau}{2}}{(\sin\frac{\tau}{2})^3}\Big(\tan\frac{\tau}{2} \;-\; \frac{\tau}{2}\Big) \\ &> 0 \quad \forall\, 0 < \tau < \pi. \end{aligned}$$

Also ist φ strikt wachsend mit $\varphi(\tau) \to \frac{\pi}{2}$ für $\tau \to \pi$.

Sei

$$\boxed{\frac{x_1}{y_1} \le \frac{\pi}{2}.}$$

Dann existiert genau ein $\tau_1 \in]0, \pi]$, so daß

$$\frac{x_1}{y_1} = \varphi(\tau_1) = \frac{\tau_1 - \sin\tau_1}{1 - \cos\tau_1}.$$

Wir setzen nun:

$$k := \frac{2x_1}{\tau_1 - \sin\tau_1}.$$

Dan folgt

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{k}{2}(\tau_1 - \sin\tau_1) = \alpha(\tau_1), \\ y_1 &= \frac{x_1(1-\cos\tau_1)}{\tau_1 - \sin\tau_1} = \frac{k}{2}(1 - \cos\tau_1) = \beta(\tau_1). \blacksquare \end{aligned}$$

Für $\alpha(t)$ $(0 \le \tau \le \tau_1)$ gilt

$$\alpha'(\tau) = \frac{k}{2}(1 - \cos\tau_1) > 0 \quad \forall\, \tau \in]0, \tau_1]$$

Daher besitzt α eine wohlbestimmte Umkehrfunktion α^{-1} auf dem Intervall $]0, x_1]$; es gilt

$$(\alpha^{-1})'(t) = \frac{1}{\alpha'(\tau)} \quad (t = \alpha(\tau), \tau \in]0, \tau_1]).$$

Wir definieren

$$\tilde{u}(t) := \beta(\alpha^{-1}(t)), \quad t \in]0, x_1].$$

Einige elementare Eigenschaften von $\tilde{u}$ sind in dem folgenden Satz notiert.

SATZ 3

1. $\tilde{u} \in C([0, x_1]) \cap C^\infty(]0, x_1])$.
2. $\tilde{u}(0) = 0; \tilde{u}(x_1) = y_1; \quad 0 < \tilde{u}(t) \le k \quad \forall\, t \in]0, x_1]; \quad \lim_{t \to 0} \tilde{u}'(t) = +\infty$.

3. $\mathcal{F}(\tilde{u}) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \displaystyle\int_{\varepsilon}^{x_1} \sqrt{\frac{1+\tilde{u}'^2}{\tilde{u}}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{k}\tau_1;\quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \displaystyle\int_{\varepsilon}^{x_1} \sqrt{\frac{1+\tilde{u}'^2}{\tilde{u}^3}}\,\mathrm{d}t = +\infty$

4. $\tilde{u}' = \sqrt{\dfrac{k-\tilde{u}}{\tilde{u}}} \quad \forall\, t \in]0, x_1].$

5. $\delta\mathcal{F}(\tilde{u}; v) = 0 \quad \forall\, v \in \widehat{C}^1([0, x_1]).$