Fundamentallemma der Variationsrechnung

Für $-\infty < a < b < +\infty$ sei

$$C_0^1([a,b]) := \Big\{ \varphi \in C^1([a,b]) \;\Big|\; \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \Big\}.$$

Lemma 1 *Für $u \in C([a,b])$ gelte*

$$\int_a^b u\varphi' dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1([a,b]). \tag{1}$$

Dann ist

$$u(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b u ds \quad \forall t \in [a,b].$$

Beweis Für $c_0 \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\varphi_0(t) := \int_a^t (u(s) - c_0) ds, \quad t \in [a,b].$$

Es gilt

$$\varphi_0(a) = 0, \quad \varphi_0'(t) = u(t) - c_0 \quad \forall t \in [a,b].$$

Wir bestimmen nun c_0 so, daß $\varphi_0(b) = 0$, d.h.

$$0 = \varphi_0(b) = \int_a^b (u(s) - c_0) ds = \int_a^b u ds - c_0(b-a),$$

also:

$$c_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b u ds.$$

Die Funktion φ_0 ist zulässig in (1). Es folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b (u(t) - c_0)^2 dt &= \int_a^b (u(t) - c_0)\varphi_0'(t) dt \\ &= \int_a^b u\varphi_0' dt - c_0 \int_a^b \varphi_0' dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dies impliziert

$$u(t) - c_0 = 0 \quad \forall t \in [a, b].$$

■

Bemerkung 1 Für $u \in C([a, b])$ sind äquivalent:

1° $\int\limits_a^b u\varphi' dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1([a, b]);$

2° $\int\limits_a^b u\psi dt = 0 \quad \forall \psi \in C([a, b])$ mit $\int\limits_a^b \psi dt = 0.$

■

LEMMA 2 (**Fundamentallemma der Variationsrechnung**) *Für die Funktionen $u, v \in C([a, b])$ gelte*

$$\int\limits_a^b (u\varphi + v\varphi')dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1([a, b]). \tag{2}$$

Dann gilt:

- $\exists v' \in C([a, b])$,
- $u(t) - v'(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$.

BEWEIS Wir definieren

$$U(t) := \int\limits_a^t u ds, \quad t \in [a, b].$$

Aus der Definition von U ergibt sich

$$U'(t) = u(t) \quad \forall t \in [a, b],$$

$$\begin{aligned} \int\limits_a^b u\varphi dt &= \int\limits_a^b U'\varphi dt = U\varphi\Big|_{t=a}^{t=b} - \int\limits_a^b U\varphi' dt \\ &= -\int\limits_a^b U\varphi' dt \quad \forall \varphi \in C_0^1([a, b]). \end{aligned}$$

Daher kann (2) wie folgt geschrieben werden:

$$\int_a^b (-U+v)\varphi' dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1([a,b]).$$

Lemma 1 impliziert nun

$$-U(t)+v(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b (-U+v)ds \quad \forall t \in [a,b],$$

also

$$v(t) = \int_a^t u ds + \frac{1}{b-a}\int_a^b \Big(-\int_a^s u d\tau + v(s)\Big) ds \quad \forall t \in [a,b].$$

Hieraus folgen die Behauptungen. ■

Folgerung 1 *Für $u \in C([a,b])$ gelte*

(3)
$$\int_a^b u\varphi dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1([a,b]).$$

Dann ist

$$u(t) = 0 \quad \forall t \in [a,b].$$

Beweis Lemma 2 mit $v = 0$ anwenden. ■

Bemerkung 2 Die Aussage von Folgerung 1 bleibt gültig, wenn in (3) anstelle von $C_0^1([a,b])$ andere Mengen von Testfunktionen betrachtet werden.

Wir definieren

$$\begin{aligned} C_0([a,b]) &:= \Big\{\psi \in C([a,b]) \mid \psi(a) = \psi(b) = 0\Big\}, \\ C_c(]a,b[) &:= \Big\{\zeta \in C(]a,b[) \;\Big|\; \mathrm{supp}(u) \subset \;]a,b[\;\Big\} \\ &= \text{Vektorraum der stetigen Funktionen auf }]a,b[, \\ &\quad\; \text{mit Träger in }]a,b[. \end{aligned}$$

wobei:

$$\mathrm{supp}(u) := \overline{\Big\{t \in \;]a,b[\;\Big|\; u(t) \neq 0\Big\}}$$

Es gilt:

Für $u \in C([a,b])$ *sind äquivalent*:

$$1^\circ \quad \int\limits_a^b u\varphi dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1([a,b]);$$

$$2^\circ \quad \int\limits_a^b u\zeta dt = 0 \quad \forall \zeta \in C_c(]a,b[);$$

$$3^\circ \quad \int\limits_a^b u\psi dt = 0 \quad \forall \psi \in C_0([a,b]).$$

Beweis $1^\circ \Longrightarrow 2^\circ$: jede Funktion aus $C_c(]a,b[)$ kann durch Funktionen aus $C_c^\infty(]a,b[)$ im Sinne der Norm in $C([a,b])$ approximiert werden.

$2^\circ \Longrightarrow 3^\circ$: für jedes $\psi \in C_0([a,b])$ existiert eine Folge $(\psi_k) \subset C_c(]a,b[)$, so daß

$$\psi_k \to \psi \text{ in } C([a,b]).$$

$3^\circ \Longrightarrow 1^\circ$: klar. .

Euler-Lagrange*sche Gleichungen*

Sei $f = f(t,x,y)$ eine Funktion aus $C([a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, so daß

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial y_i} \in C([a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Wir betrachten das Funktional

$$\mathcal{F}(u) := \int\limits_a^b f(t, u(t), u'(t))dt, \; u \in C^1([a,b]; \mathbb{R}^n).$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} D\mathcal{F}(u;h) &:= \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda}\Big(\mathcal{F}(u+\lambda h) - \mathcal{F}(u)\Big) \\ &= \sum_{i=1}^n \int\limits_a^b \Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,u,u')h_i + \frac{\partial f}{\partial y_i}(t,u,u')h_i'\Big)dt \end{aligned}$$

für alle $u, h \in C^1([a,b];\mathbb{R}^n)$.

SATZ *Für $u \in C^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ gelte*

$$D\mathcal{F}(u;h) = 0 \quad \forall h \in C_0^1([a,b];\mathbb{R}^n)$$

„*Prinzip der virtuellen Arbeit*“

Dann gilt:

- $\dfrac{\partial f}{\partial y_i}(\cdot, u, u') \in C^1([a,b])$,
- $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Big(t, u(t), u'(t)\Big) - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial f}{\partial y_i}\Big(t, u(t), u'(t)\Big) = 0 \quad \forall t \in [a,b]$

  $(i = 1, \ldots, n)$ EULER-LAGRANGE*sche Gleichungen.*

BEWEIS Lemma 2 komponentenweise anwenden. ∎

Anhang

Die Aussagen von Lemma 1 und Folgerung 1 können in analoger Weise für lokal integrierbare Funktionen mehrerer Veränderlicher formuliert werden.

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

SATZ 1 *Sei $u \in L^1_{\text{loc}}(E)$.*

1. Es gelte

$$\int_E u\varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(E).$$

Dann ist

$$u(x) = 0 \quad \textit{für f.a.} \quad x \in E.$$

2. Es gelte

$$\int_E u\psi dx = 0 \quad \forall \psi \in C_c^\infty(E) \quad \textit{mit} \quad \int_E \psi dx = 0.$$

Dann gilt für jede meßbare Menge $E_0 \subseteq E$ mit $0 < \lambda_n(E_0) < +\infty$:

$$u(x) = \frac{1}{\lambda_n(E_0)} \int_{E_0} u dy \quad \textit{für f.a.} \quad x \in E.$$

SATZ 2 *Sei* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *ein* **Gebiet**. *Für* $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(E)$ *sind äquivalent*:

1° $\exists\, c_0 = \mathrm{const}: \; u(x) = c_0$ für f.a. $x \in E$;

2° $\displaystyle\int\limits_E u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = 0 \;\; \forall \varphi \in C_0^\infty(E), \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$