# $L^p_w$-Räume

**1. Definition**

**2. Normierung**

**3. Interpolationssätze von** MARCINKIEWICZ

**Anhang: Verteilungsfunktion einer meßbaren Funktion**

# 1. Definition

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maß-Raum.

**1.1 Definition** *Sei* $1 \leq p < +\infty$. *Die Menge*

$$L^p_w(X) := \left\{ u : X \to \bar{\mathbb{R}}\ \mathcal{A} - meßbar \;\middle|\; \sup_{t>0} \left\{ t \left[ \mu \left( \left\{ x \in X \;\middle|\; |u(x)| > t \right\} \right) \right]^{1/p} \right\} < +\infty \right\}$$

*heißt* **schwacher $L^p$-Raum** *oder* MARCINKIEWICZ-**Raum**.

Für $u \in L^p_w(x)$ definieren wir

$$[u]_{L^p_w} := \sup_{t>0} \left\{ t \left[ \mu \left( \left\{ x \in X \;\middle|\; |u(x)| > t \right\} \right) \right]^{1/p} \right\}.$$

**1.2 Proposition** *Es gilt:*

1. $[u]_{L^p_w} \leq \|u\|_{L^P} \quad \forall\ u \in L^p(X)$;

2.1 $[u]_{L^p_w} = 0 \;\Leftrightarrow\; u(x) = 0$ *für* $\mu - f.\ a\ x \in X$,

2.2 $[\lambda u]_{L^p_w} = |\lambda| [u]_{L^p_w} \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$,

2.3 $[u + v]_{L^p_w} \leq 2([u]_{L^p_w} + [v]_{L^p_w})$.

Die Aussage 1 bedeutet, daß $L^p(X) \subseteq L^p_w(X)$ gilt, während 2.2 und 2.3 implizieren, daß $L^p_w(X)$ ein Vektorraum ist.

**Beispiel** Seien $X = ]0,1[$, $\mu = \lambda_1$ (= das auf die $\sigma$-Algebra der LEBESGUE-meßbaren Teilmengen von $]0,1[$ eingeschränkte eindimensionale LEBESGUE-Maß).

1. Für die Funktion

$$u(x) := \frac{1}{x}, \quad x \in ]0,1[$$

gilt:

$$\int_{]0,1[} u d\lambda_1 = +\infty, \quad \sup_{t>0} \lambda_1 \left( \left\{ x \in ]0,1[ \;\middle|\; |u(x)| > t \right\} \right) = 1.$$

Daher ist $L^1(]0,1[) \subseteq L^1_w(]0,1[)$ eine echte Inklusion.

2. Für die Funktionen

$$u(x) := x, \quad v(x) := 1 - x, \quad x \in ]0,1[$$

gilt:

$$[u+v]_{L^1_w} = 1 > \frac{1}{2} = [u]_{L^1_w} + [v]_{L^1_w}.$$

Somit ist $[\cdot]_{L^1_w}$ keine Norm auf $L^1_w(]0,1[)$. ■

**1.3 Satz** *Seien $\mu(X) < +\infty$, $1 < p < +\infty$. Für alle $0 < \varepsilon < p-1$ und $u \in L^p_w(X)$ gilt*

$$\|u\|_{L^{p-\varepsilon}} \leq \left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^{1/(p-\varepsilon)} \Big(\mu(X)\Big)^{\varepsilon/p(p-\varepsilon)} [u]_{L^p_w}.$$

Die Behauptung dieses Satzes erhält man aus der Gleichung

$$\|u\|^{p-\varepsilon}_{L^{p-\varepsilon}} = (p-\varepsilon) \int\limits_0^{+\infty} t^{p-\varepsilon-1} \mu\Big(\{x \;\Big|\; |u(x)| > t\}\Big) dt$$

(vgl. Anhang). ■

# 2. Normierung

**2.1 Definition** *Seien $\mu(X) < +\infty$, $1 < p < +\infty$. Für $u \in L^p_w(X)$ sei*

$$\|u\|_{L^p_w(X)} := \sup_{A \in \mathcal{A}, \mu(A) > 0} \frac{1}{(\mu(A))^{p/(p-1)}} \int\limits_A |u| d\mu.$$

**2.2 Satz**

**1.** $\|u\|_{L^p_w}$ *ist Norm auf* $L^p_w(X)$.

**2.** $L^p_w(X)$ *ist* Banach*-Raum bez. der Norm* $\|\cdot\|_{L^p_w}$.

**3.** *Es gilt*

$$[u]_{L^p_w} \leq \|u\|_{L^p_w} \leq \frac{p}{p-1}[u]_{L^p_w} \quad \forall\, u \in L^p_w(X).$$

■

# 3. Interpolationssätze von Marcinkiewicz

**3.1 Definition** *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maß-Räume, seien $1 \leq p, q < +\infty$.*
*Eine Abbildung $T$ von $L^p(X)$ in die Menge der $\mathcal{B}$-meßbaren Funktionen von $Y$ in $\bar{R}$ heißt vom* **schwachen Typ $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$**, *wenn*

$$\exists\, C = \text{const} \; < +\infty : \forall\, f \in L^p(X),\ \forall\, t > 0 :$$
$$\nu\Big(\Big\{y \in Y \;\Big|\; |(Tf)(y)| > t\Big\}\Big) \le \left(\frac{C\|f\|_{L^p}}{t}\right)^q.$$

**Bemerkungen.** 1. Aus Definition 3.1 folgt

$$[Tf]_{L^q_w(Y)} \le C\|f\|_{L^p(X)}.$$

2. Für $T : L^p(X) \to L^q(Y)$ gelte

$$\|Tf\|_{L^q(X)} \le C_0\|f\|_{L^p(X)} \quad \forall\, f \in L^p(X)\ (C_0 = \text{const}).$$

Dann ist $T$ vom schwachen Typ $(p, q)$.
In der Tat, setzt man $E_t := \Big\{y \in Y \;\Big|\; |(Tf)(y)| > t\Big\}$ $(t > 0)$, so folgt

$$\begin{aligned}\nu(E_t) = \int\limits_{E_t} d\nu \;&\le\; \int\limits_{E_t} \left|\frac{(Tf)(y)}{t}\right|^q d\nu \\ &\le\; \frac{1}{t^q}\int\limits_{Y} |Tf|^q d\nu \\ &\le\; \frac{1}{t^q}\cdot C_0^q\|f\|^q_{L^p(X)}.\end{aligned}$$

■

**3.2 Satz** (Marcinkiewicz I) *Sei $T$ eine Abbildung, so daß*

$$T : L^1(X) \to L^1_w(X), \quad T : L^\infty(X) \to L^\infty(X).$$

*$T$ besitze folgende Eigenschaften:*

*1. (Subadditivität) $\exists\, K_0 = const \; < +\infty$, so daß*

$$\begin{cases} |T(u+v)(x)| \le K_0(|Tu(x)| + |Tv(x)|) \\ \forall\, u, v : X \to \mathbb{R} \quad \mathcal{A} - meßbar,\ für\ \mu - f.\ a. \quad x \in X; \end{cases}$$

*2. (Beschränktheit) $\exists\, M_1 = const \; < +\infty$, $M_\infty = const \; < +\infty$, so daß*

*2.1 $[Tu]_{L^1_w} \le M_1\|u\|_{L^1} \quad \forall\, u \in L^1(X)$,*

*2.2 $\|Tu\|_{L^\infty} \le M_2\|u\|_{L^\infty} \quad \forall\, u \in L^\infty(X)$.*

*Dann gilt für beliebiges* $p \in ]1, +\infty[$ *und alle* $u \in L^1(X) \cap L^\infty(X)$

$$\|Tu\|_{L^p} \leq M_p \|u\|_{L^p},$$

*wobei*

$$M_p := 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p} K_0 M_1^{1/p} M_\infty^{1-1/p}.$$

**3.3 Satz** (Marcinkiewicz II) *Seien* $1 \leq q < r < +\infty$. *Sei* $T$ *eine Abbildung von* $L^q(X) + L^r(X)$ *in die Menge der* $\mathcal{B}$*-meßbaren Funktionen von* $Y$ *in* $\bar{\mathbb{R}}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

*1. (Subadditivität) [vgl. Satz 3.2; 1.];*

*2. (Beschränktheit)* $\exists\, M_q = const < +\infty$, $M_r = const < +\infty$, *so daß*

*2.1* $[Tu]_{L^q_w} \leq M_q \|u\|_{L^q} \;\; \forall\, u \in L^q(X)$,

*2.2* $[Tu]_{L^r_w} \leq M_r \|u\|_{L^r} \;\; \forall\, u \in L^r(X)$.

*Dann gilt für beliebiges* $p \in ]q, r[$ *und alle* $u \in L^q(X) \cap L^r(X)$

$$\|T\|_{L^p} \leq C M_q^\theta M_r^{1-\theta} \|u\|_{L^p},$$

*wobei*

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{r}, \quad C = \text{const}.$$

■

**Bemerkung** Sei $1 \leq q < r < +\infty$.

1) Sei $q < p < r$. Definiere $\theta := \dfrac{q(r-p)}{p(r-q)}$. Dann gilt:

$$0 < \theta < 1, \quad \frac{1}{p} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{r}.$$

2) Sei $0 < \theta < 1$. Definiere $p := \dfrac{qr}{\theta(r-q)+q}$. Dann gilt:

$$q < p < r, \quad \frac{1}{p} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{r}.$$

■

Sei $f \in L^q(X) \cap L^r(X)$ $(1 \le q < r < +\infty)$. Sei

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{r} \quad (0 < \theta < 1).$$

Definiere $\sigma := \dfrac{q}{p\theta}$, und

$$u := |f|^{\theta p}, \quad v := |f|^{(1-\theta)p}.$$

Dann gilt $u \in L^\sigma(X),\ v \in L^{\sigma'}(X)$ [1] und daher

$$uv \in L^1(X),$$

$$\begin{aligned} \int_X |uv| d\mu &\le \left( \int_X |u|^\sigma d\mu \right)^{\frac{1}{\sigma}} \left( \int_X |v|^{\sigma'} d\mu \right)^{\frac{1}{\sigma'}} \\ &= \left( \int_X |f|^q d\mu \right)^{\frac{\theta p}{q}} \left( \int_X |f|^r d\mu \right)^{\frac{(1-\theta)p}{r}}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$L^q(X) \cap L^r(X) \subset L^p(X).$$

■

## Anhang: Verteilungsfunktion einer meßbaren Funktion

Sei $u : X \to \bar{\mathbb{R}}$ eine $\mathcal{A}$-meßbare Funktion. Die Funktion

$$\lambda_u(t) := \mu\Big(\Big\{x \in X \;\Big|\; |u(x)| > t\Big\}\Big), \quad t \in [0, +\infty[$$

heißt **Verteilungsfunktion von u**.

Einige wichtige Eigenschaften von $\lambda_u$ sind zusammengestellt in der folgenden

**Proposition**

1. $\lambda_u$ *ist fallend und rechtsseitig stetig*;
2. *wenn* $|u| \le |v|$, *so* $\lambda_u \le \lambda_v$;
3. *wenn* $|u_n| \uparrow |u|$, *so* $\lambda_{u_n} \uparrow \lambda_u$;
4. *wenn* $u = v + w$, *so* $\lambda_u(t) \le \lambda_v\left(\frac{t}{2}\right) + \lambda_w\left(\frac{t}{2}\right)$ *für alle* $t \in [0, +\infty[$.

[1] $\sigma' := \dfrac{\sigma}{\sigma - 1}$ konjugierter Exponent zu $\sigma$.

Mit Hilfe des Satzes von FUBINI kann folgende Aussage bewiesen werden.

**Satz** *Sei gegeben* $\varphi \in C^1([0,+\infty[)$ *mit*

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(t) \geq 0 \quad \forall\ t \in [0,+\infty[.$$

*Dann gilt für jede* $\mathcal{A}$*-meßbare Funktion* $u : X \to [0,+\infty[$:

$$\int\limits_X \varphi(u(x))d\mu = \int\limits_0^{+\infty} \varphi'(t)\mu\Big(\Big\{x \;\Big|\; u(x) > t\Big\}\Big)dt.$$

■