

Skript zur Vorlesung Analysis III

Teil II: Untermannigfaltigkeiten/Vektoranalysis

Prof. Dr. J. Naumann

Wintersemester 2002/2003

17. 02. 2003

1. RIEMANN-Integral in \mathbb{R}^n
2. Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n
 - 2.1 Definition. Äquivalente Charakterisierung
 - 2.2 Tangentialraum. Normalenraum
 - 2.3 Beispiele
 - 2.4 Orientierung
3. Integration auf Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n
 - 3.1 Vorbereitungen (GRAMSche Determinante. Eigenschaften der GRAMSchen Determinante. Motivation für die Definition des Inhaltes von Teilmengen von \mathcal{M}^{n-1})
 - 3.2 Integral auf Untermannigfaltigkeiten
 - 3.3 Beispiele
4. Integralsätze

Literaturverzeichnis

Die Zeichnungen wurden von B. SCHÜMANN angefertigt.

Ein eleganter Autor sagt in zwei Zeilen, wozu ein anderer eine ganze Seite braucht. Wenn aber ein Leser über diese zwei Zeilen eine ganze Stunde grübeln muß, während er die Seite in fünf Minuten gelesen und verstanden haben würde, dann war das – für diesen einen Leser – wohl doch nicht die richtige *Art* von Eleganz. Es kommt eben ganz darauf an, für wen ein Autor schreibt.

Ich schreibe hier für Studenten im zweiten Studienjahr, die von Mannigfaltigkeiten und solchen Sachen noch gar nichts wissen, sondern ganz einfach zufrieden mit sich sein können, wenn sie die Differential- und Integralrechnung in einer und mehreren Variablen im großen und ganzen verstanden haben. Etwaige andere Leser bitte ich um gelegentliche Geduld. Natürlich möchte auch ich gern beide Arten von Eleganz verbinden, aber wenn es nicht geht, dann werfe ich ohne Bedenken die Zeileneleganz über Bord und halte mich an die Minuteneleganz. Wenigstens ist das meine Absicht!

Aus dem Vorwort von

JÄNICH, K.: *Vektoranalysis*. Springer-Verlag, Berlin 1992.

2. Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n

Bezeichnungen:

1. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

$$x = (x', x'') \text{ mit } x' = (x_1, \dots, x_k), x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n) \text{ (} 1 \leq k \leq n-1 \text{)}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbb{R}^k \times \{0\} : &= \left\{ x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \mid x'' = 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0 \right\} \end{aligned} \right.$$

2. Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $\varphi : U \rightarrow V$ heißt **C^m -Diffeomorphismus** zwischen U und V ($m \geq 1$), wenn

- 1) φ ist bijektiv;
- 2) $\varphi \in C^m(U; \mathbb{R}^n)$, $\varphi^{-1} \in C^m(V; \mathbb{R}^n)$.

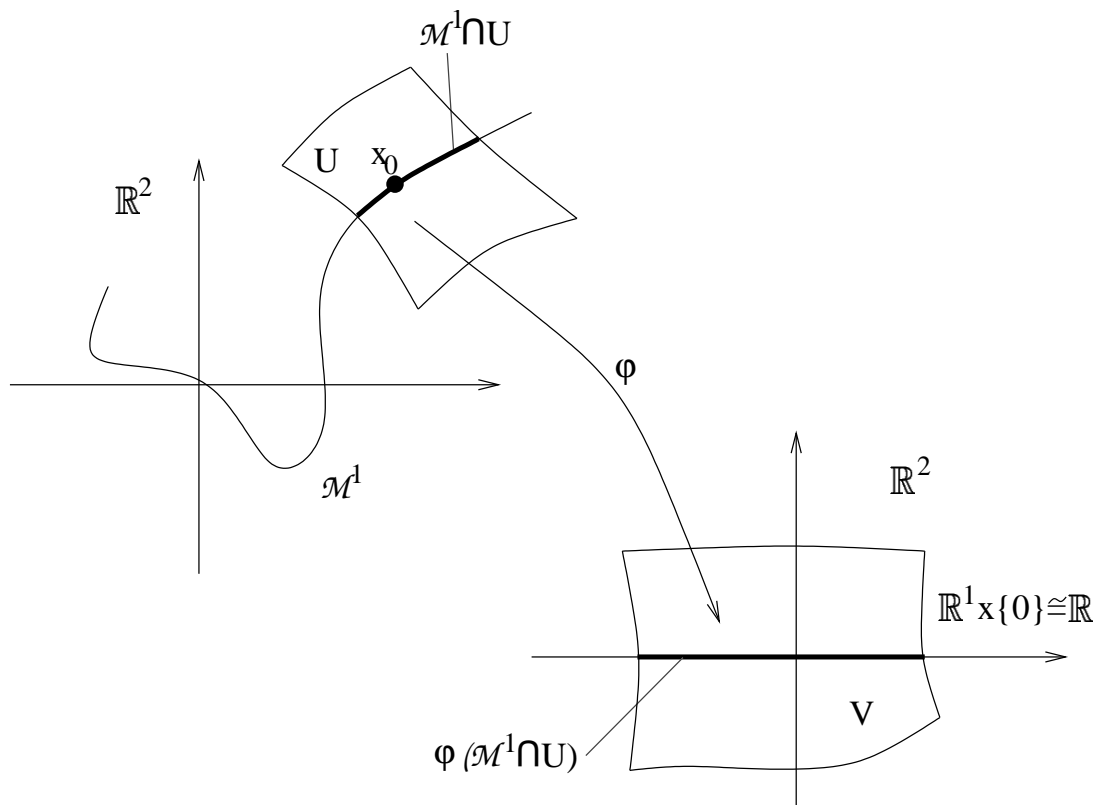
2.1 Definition. Äquivalente Charakterisierung

Definition 2.1 Eine Menge $\mathcal{M}^k \subset \mathbb{R}^n$ heißt **k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^m des \mathbb{R}^n** [kurz: C^m -UMF], wenn :

$$\left\| \begin{aligned} &\text{für jedes } x \in \mathcal{M}^k \text{ gibt es eine Umgebung } U = U(x) \subset \mathbb{R}^n \text{ und einen } C^m\text{-} \\ &\text{Diffeomorphismus } \varphi : U \rightarrow V = \varphi(U) \text{ (} V \subset \mathbb{R}^n \text{ offen), so daß} \\ &\varphi(\mathcal{M}^k \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}). \end{aligned} \right.$$

Das Paar (U, φ) heißt **Karte** oder **lokales Koordinatensystem** um x mit dem Kartengebiet U . Eine Menge von Karten $\{(\mathcal{M} \cap U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ ($\Lambda = \text{Indexmenge}$) heißt **Atlas** für \mathcal{M}^k , wenn

$$\mathcal{M}^k = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (\mathcal{M}^k \cap U_\alpha).$$



\mathcal{M}^1 kann lokal auf offene Teilmengen $V \cap (\mathbb{R}^1 \times \{0\})$ abgebildet werden.

Satz 2.2 (äquivalente Charakterisierung) Für eine Teilmenge $\mathcal{M}^k \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

- 1⁰ \mathcal{M}^k ist k -dimensionale C^m -UMF (= Definition 2.1);
- 2⁰ [lokale Darstellung von \mathcal{M}^k als Nullstellenmenge einer C^m -Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen]: für jedes $x_0 \in \mathcal{M}^k$ existieren eine Umgebung $U = U(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ und eine Abbildung $f \in C^m(U; \mathbb{R}^{n-k})$, so daß:
- 1) $\mathcal{M}^k \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$,
 - 2) $\text{Rang } f'(x) = n - k \quad \forall x \in U$;
- 3⁰ [lokale Darstellung von \mathcal{M}^k als Graph einer C^m -Abbildung $g : U' \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, $U' \subset \mathbb{R}^k$ offen] für jedes $x_0 \in \mathcal{M}^k$ existieren (nach evtl. Umnummerierung der Variablen) eine Umgebung $U' = U'(x'_0) \subset \mathbb{R}^k$, eine Umgebung $U'' = U''(x''_0) \subset \mathbb{R}^{n-k}$ ($x_0 = (x'_0, x''_0)$) und eine Abbildung $g \in C^m(U'; \mathbb{R}^{n-k})$, so daß

$$\mathcal{M}^k \cap (U' \times U'') = \left\{ x = (x', x'') \in U' \times U'' \mid x'' = g(x') \right\};$$

- 4⁰ [lokale Parameterdarstellung] für jedes $x_0 \in \mathcal{M}^k$ existieren eine Umgebung $U = U(x_0) \subset \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $T \subset \mathbb{R}^k$ und eine Abbildung $\psi \in C^m(T; \mathbb{R}^n)$, so daß

- 1) $\psi(T) = \mathcal{M}^k \cap U$,
- 2) $\text{Rang } \psi'(t) = k \quad \forall t \in T$,
- 3) ψ ist injektiv, $\psi^{-1} : \mathcal{M}^k \cap U \rightarrow T$ ist stetig.

Beweis $\boxed{1^0 \Rightarrow 2^0}$ Sei $x_0 \in \mathcal{M}^k$. Seien $U = U(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von x_0 und $\varphi : U \rightarrow V = \varphi(U)$ ein C^m -Diffeomorphismus gemäß Definition 2.1.

Wir definieren

$$f(x) := \begin{pmatrix} \varphi_{k+1}(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}, \quad x \in U.$$

Dann ist $f \in C^m(U; \mathbb{R}^{n-k})$ und $\mathcal{M}^k \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$. Da $\varphi : U \rightarrow V$ eine Diffeomorphie ist, gilt

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = id_V \quad (\text{Identität in } V).$$

Differentiation dieser Gleichung ergibt

$$\varphi'(\varphi^{-1}(y)) \cdot (\varphi^{-1})'(y) = E \quad (= \text{Einheitsmatrix}), \quad y \in V.$$

Wegen $\text{Rang } E = n$ gilt

$$\text{Rang } \varphi'(x) = \text{Rang } (\varphi^{-1})'(\varphi(x)) = n \quad \forall x \in U$$

($x = \varphi^{-1}(y)$, $y \in V$). Das ergibt $\text{Rang } f'(x) := n - k$ für alle $x \in U$.

$\boxed{2^0 \Rightarrow 3^0}$ Sei $x_0 \in \mathcal{M}^k$. Seien $U = U(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von x_0 und $f \in C^m(U; \mathbb{R}^{n-k})$ gemäß 2⁰. Die Bedingung 2) bedeutet: es existieren Indizes $\{i_1, \dots, i_{n-k}\} \subset \{1, \dots, n\}$, so daß

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_{n-k}}}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_{i_1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_{i_{n-k}}}(x) \end{pmatrix} = n - k \quad (x \in U).$$

Hierbei kann die Index-Menge $\{i_1, \dots, i_{n-k}\}$ von $x \in U$ abhängen. Durch Verkleinerung von U können wir erreichen, daß $\{i_1, \dots, i_{n-k}\}$ nicht von $x \in U$ abhängt (d. h. ein und dieselbe Index-Menge $\{i_1, \dots, i_{n-k}\}$ erfüllt 2) für alle $x \in U$). Durch Umnummerierung der Variablen kann man außerdem ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\{i_1, \dots, i_{n-k}\} = \{k+1, \dots, n\}$.

Sei also

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{k+1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_{k+1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = n - k \quad \forall x \in U.$$

Wir wählen nun eine "Rechteckmenge" $U' \times U''$ wie folgt: $U' = U'(x'_0) \subset \mathbb{R}^k$ ist Umgebung von x'_0 , $U'' = U''(x''_0) \subset \mathbb{R}^{n-k}$ ist Umgebung von x''_0 ($x_0 = (x'_0, x''_0)$) und $U' \times U'' \subset U$. Dann ergibt 1)

$$\mathcal{M}^k \cap (U' \times U'') = \{x = (x', x'') \in U' \times U'' \mid f(x', x'') = 0\}.$$

Der Satz über die implizite Funktion sichert die Auflösbarkeit der Gleichung $f(x', x'') = 0$ nach x'' in einer Umgebung von x'_0 : es existieren eine Umgebung $\hat{U}' = \hat{U}'(x'_0) \subset \mathbb{R}^k$ von x'_0 und eine Abbildung $g \in C^m(\hat{U}', \mathbb{R}^{n-k})$, so daß

$$x''_0 = g(x'_0), \quad g(x') \in U'' \text{ und } f(x', g(x')) = 0 \quad \forall x' \in \hat{U}'.$$

Das ergibt

$$\mathcal{M}^k \cap (\hat{U}' \times U'') = \{x = (x', x'') \in \hat{U}' \times U'' \mid x'' = g(x')\}.$$

$3^0 \Rightarrow 4^0$ Sei $x_0 \in \mathcal{M}^k$. Seien $U' = U'(x'_0) \subset \mathbb{R}^k$, $U'' = U''(x''_0) \subset \mathbb{R}^{n-k}$ ($x_0 = (x'_0, x''_0)$) und $g \in C^m(U'; \mathbb{R}^{n-k})$ gemäß 3^0 . Wir definieren

$$T := U', \quad U := U' \times U''.$$

$$\psi(t) := \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \\ g_1(t) \\ \vdots \\ g_{n-k}(t) \end{pmatrix} = (t, g(t)), \quad t \in T.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^k \cap U &= \mathcal{M}^k \cap (U' \times U'') = \{x = (x', x'') \in U' \times U'' \mid x'' = g(x')\} \\ &= \{(t, g(t)) \mid t \in T\} \\ &= \psi(T) \end{aligned}$$

und

$$\psi'(\cdot) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial g_1}{\partial t_1} & \frac{\partial g_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial t_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_{n-k}}{\partial t_1} & \frac{\partial g_{n-k}}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial g_{n-k}}{\partial t_k} \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \frac{\partial g_1}{\partial t_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial g_{n-k}}{\partial t_1} \end{pmatrix}} \right\} k \text{ Zeilen}$$

Daher gilt

$$\text{Rang } \psi'(t) = k \quad \forall t \in T.$$

Die Abbildung ψ ist injektiv, denn aus

$$(\psi(t), g(t)) = \psi(t) = \psi(\bar{t}) = (\bar{t}, g(\bar{t}))$$

folgt $t = \bar{t}$. Um ψ^{-1} zu berechnen, bemerken wir, daß $x = \psi(t)$ äquivalent zu $x' = t$, $x'' = g(t)$ ist. Wir erhalten

$$\psi^{-1}(x) = x' = \text{Proj}_{\mathbb{R}^k} x.$$

Daher ist ψ^{-1} stetig.

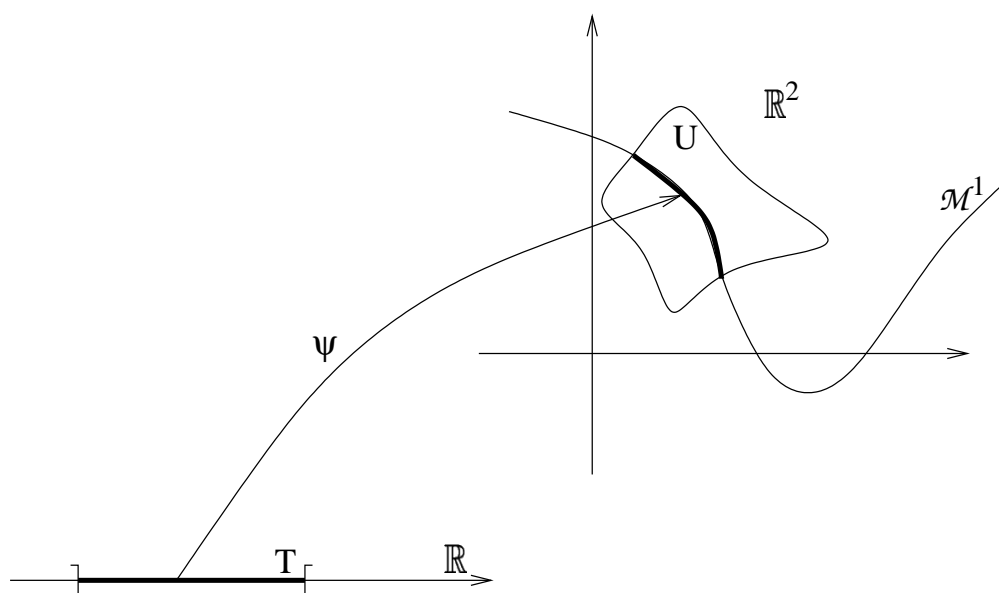
Bevor wir die Implikation $4^0 \Rightarrow 1^0$ beweisen, notieren wir die folgende

Bemerkung. Sei $\{T, \psi\}$ eine lokale Parameterdarstellung um $x_0 \in \mathcal{M}^k$, d. h. T ist eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^k und $\psi \in C^m(T; \mathbb{R}^n)$, so daß

- 1) $\psi(T) = \mathcal{M}^k \cap U$,
- 2) $\text{Rang } \psi'(t) = k \quad \forall t \in T$,
- 3) ψ ist injektiv, $\psi^{-1} : \mathcal{M}^k \cap U \rightarrow T$ ist stetig;

hierbei ist $U = U(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von x_0 .

Die Stetigkeit von ψ und ψ^{-1} kann wie folgt formuliert werden.



$\{T, \psi\}$ ist Parameterdarstellung von $\mathcal{M}^1 \cap U$ [ψ ist eine Homöomorphismus von der offenen Menge T in den metrischen Raum $\mathcal{M} \cap U$: ψ und ψ^{-1} sind stetige Abbildungen]

1. $\mathcal{M}^k \cap U$ ist ein metrischer Raum bez. der von \mathbb{R}^n induzierten Metrik. Bezüglich dieser Metrik heißt eine Menge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}^k \cap U$ offen in $\mathcal{M}^k \cap U$, wenn

$$\exists \hat{U} \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, so daß } \mathcal{U} = (\mathcal{M}^k \cap U) \cap \hat{U}.$$

Die Stetigkeit von $\psi : T \rightarrow \psi(T) = \mathcal{M}^k \cap U$ bedeutet also: Für jede in $\mathcal{M}^k \cap U$ offene Menge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}^k \cap U$ ist das Urbild $\psi^{-1}(\mathcal{U})$ offen in T (und damit in \mathbb{R}^k).

2. Die Stetigkeit von $\psi^{-1} : \mathcal{M}^k \cap U \rightarrow T$ bedeutet: Für jede offene Teilmenge $T_0 \subseteq T$ ist $\psi(T_0)$ offen im metrischen Raum $\mathcal{M}^k \cap U$, d. h. es existiert eine offene Menge $U_0 \subset \mathbb{R}^n$, so daß $\psi(T_0) = (\mathcal{M}^k \cap U) \cap U_0$.

Beweis von $4^0 \Rightarrow 1^0$ Sei $x_0 \in \mathcal{M}^k$. Seien $U = U(x_0) \subset \mathbb{R}^n, T \subset \mathbb{R}^k$ und $\psi \in C^m(T; \mathbb{R}^n)$ gemäß 4^0 . Wir beweisen die Existenz offener Mengen $\tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ und einer C^m -Diffeomorphie $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V} = \tilde{\varphi}(\tilde{U})$, so daß

$$x_0 \in \tilde{U}, \tilde{\varphi}(\mathcal{M}^k \cap \tilde{U}) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap \tilde{V}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß

$$(*) \quad \text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial t_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \psi_k}{\partial t_k} \end{pmatrix} = k \quad \forall t \in T.$$

Wir definieren

$$\zeta(y) = \zeta(y', y'') := \begin{pmatrix} \psi_1(y') \\ \vdots \\ \psi_k(y') \\ \psi_{k+1}(y') + y_{k+1} \\ \vdots \\ \psi_n(y') + y_n \end{pmatrix}, \quad y = (y', y'') \in T \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Aus der Definition von ζ folgt unmittelbar, daß $\zeta \in C^m(T \times \mathbb{R}^{n-k}; \mathbb{R}^n)$ und

$$\zeta(t, 0) = \psi(t) \quad \forall t \in T, \quad \zeta(T \times \{0\}) = \psi(T) = \mathcal{M}^k \cap U.$$

Es ist

$$\zeta'(\cdot) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial t_k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \psi_k}{\partial t_k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \psi_{k+1}}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \psi_{k+1}}{\partial t_k} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial t_n} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Wegen (*) gilt $\det \zeta'(y) \neq 0$ für alle $y = (y', y'') \in T \times \mathbb{R}^{n-k}$. $x_0 \in \mathcal{M}^k \cap U = \psi(T)$ bedeutet $x_0 = \psi(t_0)$ mit $t_0 \in T$. Wir setzen $y_0 := (t_0, 0) \in T \times \mathbb{R}^{n-k}$. Dann ist

$$\zeta(y_0) = x_0, \quad \det \zeta'(y_0) \neq 0.$$

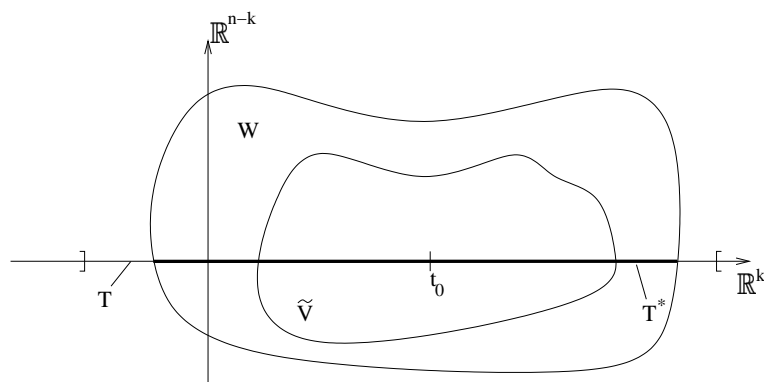
Der Satz über die inverse Abbildung sichert die Existenz einer Umgebung $W(y_0) \subseteq T \times \mathbb{R}^{n-k}$, so daß

$$\zeta(W) \quad \text{ist offen in } \mathbb{R}^n,$$

$$\zeta|_W := W \rightarrow \zeta(W) \quad \text{ist } C^m\text{-Diffeomorphie.}$$

Die Abbildung $\varphi := (\zeta|_W)^{-1}$ vermittelt eine C^m -Diffeomorphie zwischen $\zeta(W)$ und W .

Es gilt $W \cap (T \times \{0\}) = T^* \times \{0\}$ mit einer in \mathbb{R}^k offenen Menge $T^* \subseteq T$.



Satz über die inverse Abbildung $\Rightarrow W = W(y_0) \subseteq T \times \mathbb{R}^{n-k}$ offen ($y_0 = (t_0, 0)$), so daß $\zeta(W)$ offen in \mathbb{R}^n , $\zeta|_W : W \rightarrow \zeta(W)$ ist C^m -Diffeomorphie. [dann: $W \cap (T \times \{0\}) = T^* \times \{0\}$, $T^* \subset \mathbb{R}^k$ offen]

Die Stetigkeit von ψ^{-1} bedeutet, daß $\psi(T^*)$ offen in $\mathcal{M}^k \cap U$ ist, d. h. $\psi(T^*) = (\mathcal{M}^k \cap U) \cap U^*$ mit einer in \mathbb{R}^n offenen Menge U^* .

Wir definieren nun

$$\tilde{U} := \zeta(W) \cap U \cap U^*, \quad \tilde{V} = \varphi(\tilde{U}), \quad \tilde{\varphi} := \varphi|_{\tilde{U}}.$$

Wegen $y_0 = (t_0, 0) \in W \cap (T \times \{0\}) = T^* \times \{0\}$ ist $t_0 \in T^*$, also $x_0 = \psi(t_0) \in \psi(T^*) = \mathcal{M}^k \cap U \cap U^*$. Andererseits ist $x_0 = \psi(t_0) = \zeta(t_0, 0) = \zeta(y_0) \in \zeta(W)$. Also gilt $x_0 \in \mathcal{M}^k \cap \tilde{U}$.

Die Abbildung $\tilde{\varphi}$ ist eine C^m -Diffeomorphie von \tilde{U} auf $\tilde{V} = \tilde{\varphi}(\tilde{U})$. Man bestätigt mühelos, daß

$$\{\psi(t) \mid (t, 0) \in \tilde{V}\} = \mathcal{M}^k \cap \tilde{U}.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} \zeta(\tilde{V} \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})) &= \{\zeta(t, 0) \mid (t, 0) \in \tilde{V}\} \\ &= \{\psi(t) \mid (t, 0) \in \tilde{V}\} \\ &= \mathcal{M}^k \cap \tilde{U}, \end{aligned}$$

d. h.

$$\tilde{\varphi}(\mathcal{M}^k \cap \tilde{U}) = \zeta^{-1}(\mathcal{M}^k \cap \tilde{U}) = \tilde{V} \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}). \quad \blacksquare$$

Satz 2.3 (Parametertransformation) Sei $\mathcal{M}^k \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale C^m -UMF. Sei $\{T_i, \psi_i\}$ Parameterdarstellung von $\mathcal{M}^k \cap U_i$ ($i = 1, 2$) mit

$$\mathcal{U} := (\mathcal{M}^k \cap U_1) \cap (\mathcal{M}^k \cap U_2) = \mathcal{M}^k \cap U_1 \cap U_2 \neq \emptyset.$$

Dann ist

$$\psi_2^{-1} \circ \psi_1 : \psi_1^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \psi_2^{-1}(\mathcal{U})$$

ein C^m -Diffeomorphismus.

Beweis

Folgerung 2.4 Seien $\{\{T_\alpha, \psi_\alpha\} \mid \alpha \in \Lambda\}$ und $\{\{\hat{T}_\beta, \hat{\psi}_\beta\} \mid \beta \in \hat{\Lambda}\}$ zwei Parameterdarstellungen von \mathcal{M}^k . Diese Parameterdarstellungen sind äquivalent in folgendem Sinne: Sei

$$\mathcal{U} := \psi_\alpha(T_\alpha) \cap \hat{\psi}_\beta(\hat{T}_\beta) = (\mathcal{M}^k \cap U_\alpha) \cap (\mathcal{M}^k \cap \hat{U}_\beta) \neq \emptyset.$$

Dann ist

$$\hat{\psi}_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha : \psi_\alpha^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \hat{\psi}_\beta^{-1}(\mathcal{U})$$

ein C^m -Diffeomorphismus.

2.2 Tangentialraum. Normalenraum

Definition 2.5 Sei $\mathcal{M}^k \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale C^m -UMF. $\xi \in \mathbb{R}^n$ heißt **Tangentenvektor** an \mathcal{M}^k im Punkt $x_0 \in \mathcal{M}^k$, wenn eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\gamma :]-\delta, \delta[\rightarrow \mathcal{M}^k \quad (\delta > 0)$$

existiert, so daß

$$\gamma(0) = x_0, \quad \gamma'(0) = \xi.$$

Bezeichnung:

$$T_{x_0}(\mathcal{M}^k) := \text{Gesamtheit aller Tangentialvektoren an } \mathcal{M}^k \text{ im Punkt } x_0 \in \mathcal{M}^k.$$

Satz 2.6 Sei $\mathcal{M}^k \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale C^m -UMF, sei $x_0 \in \mathcal{M}^k$. Dann gilt:

1. $T_{x_0}(\mathcal{M}^k)$ ist ein k -dimensionaler Vektorraum.

2. [\mathcal{M}^k lokal als Nullstellenmenge] Sei $x_0 \in \mathcal{M}^k \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^m(U; \mathbb{R}^{n-k})$ mit $\text{Rang } f'(x) = n - k \quad \forall x \in U$). Dann gilt:

$$T_{x_0}(\mathcal{M}^k) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \langle \xi, \nabla f_j(x_0) \rangle = 0 \quad (j = 1, \dots, n - k)\}.$$

3. [\mathcal{M}^k in Parameterdarstellung] Sei $x_0 \in \mathcal{M}^k \cap U = \psi(T)$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T \subset \mathbb{R}^k$ offen $\psi \in C^m(T; \mathbb{R}^n)$ mit $\text{Rang } \psi'(t) = k \quad \forall t \in T$, ψ injektiv, ψ^{-1} stetig, $x_0 = \psi(t_0)$). Dann gilt:

$$T_{x_0}(\mathcal{M}^k) = \text{span} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t_1}(t_0), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial t_k}(t_0) \right\}.$$

Beweis Wir zeigen:

- 1) \mathcal{M}^k lokal als Nullstellenmenge $\Rightarrow T_{x_0}(\mathcal{M}^k) \subseteq \ker f'(x_0)$;
- 2) \mathcal{M}^k in Parameterdarstellung $\Rightarrow \text{span} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t_1}(t_0), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial t_k}(t_0) \right\} \subseteq T_{x_0}(\mathcal{M}^k)$.

Wegen

$$\dim(\ker f'(x_0)) = k = \dim \left(\text{span} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t_1}(t_0), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial t_k}(t_0) \right\} \right)$$

folgen

$$\dim T_{x_0}(\mathcal{M}^k) = k$$

und die Behauptungen 2. und 3.

Beweis von 1) Sei $\xi \in T_{x_0}(\mathcal{M}^k)$. Sei $\gamma :]-\delta, \delta[\rightarrow \mathcal{M}^k$ stetig differenzierbar mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma'(0) = \xi$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\gamma(s) \in \mathcal{M}^k \cap U$, d. h. $f(\gamma(s)) = 0$ für alle $s \in]-\delta, \delta[$ annehmen. Differentiation nach s ergibt $f'(\gamma(s))\gamma'(s) = 0$ für alle $s \in]-\delta, \delta[$. Für $s = 0$ bedeutet dies

$$0 = f'(x_0)\xi = \begin{pmatrix} \langle \nabla f_1(x_0), \xi \rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla f_{n-k}(x_0), \xi \rangle \end{pmatrix}.$$

Wegen $\text{Rang } f'(x_0) = n - k$ ist $f'(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ surjektiv, also $\dim(f'(x_0)\mathbb{R}^n) = n - k$. Wir erhalten

$$T_{x_0}(\mathcal{M}^k) \subseteq \ker f'(x_0), \quad \dim(\ker f'(x_0)) = k.$$

Beweis von 2) Sei $\xi \in \text{span} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial t_k}(t_0) \right\}$, d. h.

$$\xi = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial \psi}{\partial t_j}(t_0).$$

Wir fixieren ein $\delta > 0$, so daß $(t_{01} + s\lambda_1, \dots, t_{0k} + s\lambda_k) \in T$ für alle $s \in]-\delta, \delta[$ gilt. Sei

$$\gamma(s) := \psi(t_{01} + s\lambda_1, \dots, t_{0k} + s\lambda_k), \quad s \in]-\delta, \delta[.$$

Die Abbildung γ gehört zur Klasse C^m , und es gilt $\gamma(s) \in \psi(T) = \mathcal{M}^k \cap U$ für alle $s \in]-\delta, \delta[$ sowie $\gamma(0) = \psi(t_0) = x_0$ und

$$\gamma'(0) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \psi}{\partial t_j}(t_0) \lambda_j = \xi.$$

Das bedeutet $\xi \in T_{x_0}(\mathcal{M}^k)$. ■

Definition 2.7 Sei $\mathcal{M}^k \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale C^m -UMF, sei $x_0 \in \mathcal{M}^k$. $\eta \in \mathbb{R}^n$ heißt **Normalenvektor** an \mathcal{M}^k im Punkt x_0 , wenn

$$\langle \eta, \xi \rangle = 0 \quad \forall \xi \in T_{x_0}(\mathcal{M}^k).$$

Bezeichnung:

$$N_{x_0}(\mathcal{M}^k) = \text{Vektorraum der Normalenvektoren an } \mathcal{M}^k \text{ im Punkt } x_0.$$

2.3 Beispiele

1 **Sphäre in \mathbb{R}^n** Seien $a \in \mathbb{R}^n$ und $R > 0$ fixiert. Die Menge

$$S_R(a) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| = R \right\}$$

ist die Sphäre in \mathbb{R}^n (bez. der EUKLIDISCHEN Norm) mit Zentrum in a und Radius R .

1.1 *Sphäre als Nullstellenmenge einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.* Sei

$$f(x) := |x - a|^2 - R^2, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt

$$S_R(a) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0 \right\}.$$

Wegen

$$f'(x) = 2 \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in S_R(a)$$

gilt. Rang $f'(x) = 1$ für alle $x \in S_R(a)$. Daher ist $S_R(a)$ eine $(n - 1)$ -dimensionale C^∞ -UMF des \mathbb{R}^n .

Tangential- und Normalenraum in $x_0 \in S_R(a)$ sind dann:

$$T_{x_0}(S_R(a)) = \{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \langle \xi, x_0 - a \rangle = 0 \},$$

$$N_{x_0}(S_R(a)) = \{ \eta \in \mathbb{R}^n \mid \langle \eta, \xi \rangle = 0 \quad \forall \xi \in T_{x_0}(S_R(a)) \}$$

$$= \{ \lambda(x_0 - a) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$$= \text{Gerade, die durch } \nabla f(x_0) = 2(x_0 - a) \text{ bestimmt wird.}$$

Der "äußere" Normaleneinheitsvektor (vgl. Abschn. 2.4) in $x_0 \in S_R(a)$ ist gegeben durch

$$\nu = \frac{x_0 - a}{R}.$$

1.2 Sphäre als Graph einer Funktion $g : U' \rightarrow \mathbb{R}$, $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen. Wir setzen

$$U' := B_R(a') [= \text{Kugel in } \mathbb{R}^{n-1} \text{ mit Zentrum in } a' \text{ und Radius } R],$$

$$U'' :=]0, +\infty[,$$

$$g(x') := a_n + \sqrt{R^2 - |x' - a'|^2}, \quad x' \in U'.^1)$$

Damit ergibt sich die folgende Darstellung der "oberen" Halbsphäre als Graph:

$$\begin{aligned} S_R^+(a) := S_R(a) \cap (U' \times U'') &= \left\{ x = (x', x_n) \mid x' \in U', x_n = g(x') \right\} \\ &= \left\{ x = (x', x_n) \mid x' \in B_R(a'), x_n = a_n + \sqrt{R^2 - |x' - a'|^2} \right\} \end{aligned}$$

In dieser Darstellung von $S_R^+(a)$ wird der Tangentialraum in $x_0 \in S_R^+(a)$ von den folgenden Tangentialvektoren aufgespannt:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \dots, \quad \tau_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix}$$

¹⁾ $a = (a', a_n)$, $x = (x', x_n)$.

($x = x_0$). Ein Normalenvektor in $x_0 \in S_R^+(a)$ ist

$$\nu = \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial g}{\partial x_{n-1}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In analoger Weise erhält man eine Darstellung der "unteren" Halbsphäre als Graph der Funktion

$$h(x') := a_n - \sqrt{R^2 - |x' - a'|^2}, \quad x' \in U'.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} S_R(a) &= \{x = (x', x_n) \mid x' \in B_R(a'), x_n = a_n \pm \sqrt{R^2 - |x' - a'|^2}\} \\ &\quad \cup \{x = (x', x_n) \mid |x' - a'| = R, x_n = a_n\}. \end{aligned}$$

1.3 Parameterdarstellung von $S_R(a)$: kartesische Koordinaten.

Wir setzen:

$$T_\alpha := \left\{ t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{\alpha-1} \\ t_{\alpha+1} \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |t| < R \right\},$$

$$\psi_\alpha^\pm(t) := a + \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{\alpha-1} \\ \pm \sqrt{R^2 - |t|^2} \\ t_{\alpha+1} \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}, \quad t \in T_\alpha$$

($\alpha = 1, \dots, n$). Dann gilt:

$$\psi_\alpha^\pm(T_\alpha) = \{x = (x', x_n) \mid (x' - a') \in T_\alpha, x_n = a_n \pm \sqrt{R^2 - |x' - a'|^2}\},$$

$$\text{Rang } (\psi_\alpha^\pm)'(t) = n - 1,$$

$$\psi_\alpha^\pm(t) = \psi_\alpha^\pm(s) \Rightarrow t = s,$$

$$(\psi_\alpha^\pm)^{-1}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{\alpha-1} \\ x_{\alpha+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in T_\alpha, \quad x \in \psi_\alpha^\pm(T_\alpha).$$

Daher ist $\left\{ \{T_\alpha, \psi_\alpha^\pm\} \mid \alpha = 1, \dots, n \right\}$ eine Parameterdarstellung für $S_R(a)$ (mit sich "überlappenden" T_α):

$$S_R(a) = \bigcup_{\alpha=1}^n \psi_\alpha^\pm(T_\alpha).$$

1.4 *Parameterdarstellung von $S_R(a)$: Kugelkoordinaten.*

Wir definieren:

$$\begin{aligned} \psi_1(\theta) &= a_1 + R \cos \theta_1, \\ \psi_2(\theta) &= a_2 + R \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ \psi_{n-1}(\theta) &= a_{n-1} + R \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdot \dots \cdot \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}, \\ \psi_n(\theta) &= a_n + R \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdot \dots \cdot \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}. \end{aligned}$$

Wobei

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1}),$$

$$0 < \theta_i < \pi \quad (i = 1, \dots, n-2), \quad 0 < \theta_{n-1} < 2\pi.$$

Setzt man noch $T :=]0, \pi[\times \dots \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$, so gilt

$$\psi(T) = S_R(a) \setminus \{ \text{Längen- und Breitenkreise} \}$$

1.5 *Parameterdarstellung von $S_R(a)$ mittels stereographischer Projektion* ■

2 *Untermannigfaltigkeit als Graph einer Abbildung $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen und $g \in C^m(\Omega; \mathbb{R}^{n-k})$. Dann ist*

$$\mathcal{M}^k = \text{graph}(g) := \{x = (x', x'') \mid x' \in \Omega, x'' = g(x')\}$$

eine k -dimensionale C^m -UMF in \mathbb{R}^n .

Setzt man

$$\psi(t) := \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \Omega,$$

so gilt

$$\text{Rang } \psi'(t) = k \quad \forall t \in \Omega,$$

$$\psi(t) = \psi(s) \Rightarrow t = s, \quad \psi^{-1}(x) = x' \quad \forall x' \in \psi(T).$$

Daher ist $\{\Omega, \psi\}$ eine Parameterdarstellung für \mathcal{M}^k :

$$\mathcal{M}^k = \text{graph}(g) = \psi(\Omega).$$

Der Tangentialraum in $x_0 = \psi(t_0) = (t_0, g(t_0))^T \in \mathcal{M}^k$ wird aufgespannt von den Tangentialvektoren

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial g_1}{\partial t_1}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial g_{n-k}}{\partial t_1}(t_0) \end{pmatrix}, \dots, \tau_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \frac{\partial g_1}{\partial t_k}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial g_{n-k}}{\partial t_k}(t_0) \end{pmatrix}$$

(vgl. 1.2).

■

3 *Kurve in \mathbb{R}^n* Sei $\psi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^m -Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $\psi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in]a, b[$,
- 2) ψ ist injektiv, $\psi^{-1}, \psi(]a, b[) \rightarrow]a, b[$ ist stetig.

Die Menge

$$\Gamma := \psi(]a, b[) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \psi(t), t \in]a, b[\}$$

ist eine eindimensionale C^m -UMF (Kurve) des \mathbb{R}^n .

Der Tangentialraum in $x_0 = \psi(t_0) \in \Gamma$ wird von $\psi'(t_0)$ aufgespannt:

$$\begin{aligned}
T_{x_0}(\Gamma) &= \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi = \lambda \psi'(t_0), \lambda \in \mathbb{R}\} \\
&= \text{Gerade durch den Punkt } x_0.
\end{aligned}$$

Der Normalenraum ist die $(n - 1)$ -dimensionale Hyperebene

$$N_{x_0}(\Gamma) = \{\eta \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \eta_i \psi_i(t_0) = 0\}. \quad \blacksquare$$

4 *Flächen in \mathbb{R}^3 (Parameterdarstellung)* Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ offen. Sei $\psi : (u, v) \in T \mapsto \psi(u, v) \in \mathbb{R}^3$ eine C^m -Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $\text{Rang } \psi'(u, v) = 2 \quad \forall (u, v) \in T,$
- 2) ψ ist injektiv, $\psi^{-1} : \psi(T) \rightarrow T$ ist stetig.

Dann ist

$$\mathcal{F} := \psi(T) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \psi(u, v), (u, v) \in T\}$$

eine zweidimensionale C^m -UMF in \mathbb{R}^3 .

Die Tangentialebene in $x_0 = \psi(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$ wird aufgespannt von

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial u} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$((u, v) = (u_0, v_0))$. Ein Normalenvektor ist

$$\nu = \frac{\partial \psi}{\partial u} \times \frac{\partial \psi}{\partial v} \quad ^2).$$

Rotationsflächen in \mathbb{R}^3 Seien $\rho, \sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ C^m -Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

²⁾Das Vektorprodukt von $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ ist definiert als

$$a \times b := (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)^T.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
|a \times b|^2 &= |a|^2 |b|^2 - \langle a, b \rangle^2, \\
\langle a \times b, \rangle &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \\
\langle a \times b, a \rangle &= \langle a \times b, b \rangle = 0.
\end{aligned}$$

$$1) (\rho'(t))^2 + (\sigma'(t))^2 > 0, \quad \rho(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b],$$

2) die Abbildung $t \mapsto (\rho(t), \sigma(t))$ ist injektiv auf $[a, b]$, ihre Umkehrabbildung ist stetig.

Wir definieren:

$$T :=]a, b[\times]0, 2\pi[,$$

$$\psi(u, v) := \begin{pmatrix} \rho(u) \cos v \\ \rho(u) \sin v \\ \sigma(u) \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in T.$$

Für die Abbildung ψ gilt:

$$\text{Rang } \psi'(u, v) = 2 \quad \forall (u, v) \in T,$$

ψ ist injektiv, $\psi^{-1} : \psi(T) \rightarrow T$ ist stetig.

Dann ist $\mathcal{F} = \psi(T)$ eine zweidimensionale C^m -UMF in \mathbb{R}^3 . \mathcal{F} ist eine Rotationsfläche ohne den "Längenkreis"

$$\{\psi(u, 0) \mid u \in]a, b[\}$$

Diese Rotationsfläche entsteht durch Rotation der Kurve

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = (\rho(t), \sigma(t)), t \in]a, b[\}$$

um die x_3 -Achse.

Wir betrachten drei spezielle Rotationsflächen:

1. Kugel in \mathbb{R}^3
2. Torus in \mathbb{R}^3
3. Katenoid

3. Integration auf Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n

3.1 Vorbereitungen

GRAMsche Determinante

Wir erhalten

$$\left\langle \nu, \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right\rangle = \left\langle \nu, \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right\rangle = 0$$

Sei A eine $(n \times k)$ -Matrix ($1 \leq k < n$). Wir schreiben

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_k),$$

wobei

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \quad j\text{-te Spalte von } A \quad (j = 1, \dots, k).$$

Sei A^T die transponierte Matrix zu A . Für eine $(n \times k)$ -Matrix B ist dann $A^T B$ eine $(k \times k)$ -Matrix:

$$A^T B = \left(\sum_{l=1}^n a_{li} b_{lj} \right)_{i,j=1,\dots,k}.$$

Sei $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Durch Streichung der Zeilen der Matrix A mit den Indizes $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ entsteht eine $(k \times k)$ -Matrix:

$$A_{i_1, \dots, i_k} = \begin{pmatrix} a_{i_1,1} & \dots & a_{i_1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k,1} & \dots & a_{i_k,k} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt der folgende

Satz

$$\det(A^T B) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} (\det A_{i_1, \dots, i_k}) \cdot (\det B_{i_1, \dots, i_k}).$$

Für $B = A$ gilt

$$A^T A = \left(\sum_{l=1}^n a_{li} a_{lj} \right)_{i,j=1,\dots,k}.$$

Das Skalarprodukt der Spaltenvektoren a_j ist

$$\langle a_i, a_j \rangle = \sum_{l=1}^n a_{li} a_{lj} \quad (i, j = 1, \dots, k).$$

Definition

$$G(a_1, \dots, a_k) := \det(A^T A) = \det \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \dots & \langle a_1, a_k \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle a_k, a_1 \rangle & \dots & \langle a_k, a_k \rangle \end{pmatrix}$$

heißt GRAMsche Determinante der Vektoren $\{a_1, \dots, a_k\}$. Aus dem obigen Satz folgt

$$G(a_1, \dots, a_k) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \left(\det A_{i_1, \dots, i_k} \right)^2.$$

Wegen

$$Ae_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \quad (e_i = i\text{-ter Einheitsvektor in } \mathbb{R}^k)$$

gilt andererseits

$$G(a_1, \dots, a_k) = \det \left(\langle Ae_i, Ae_j \rangle_{i,j=1, \dots, k} \right).$$

Einige Eigenschaften der GRAMschen Determinante

Seien $a_i \in \mathbb{R}^n$ ($i = 1, \dots, k$) gegeben.

1. $\{a_1, \dots, a_k\}$ linear unabhängig $\Leftrightarrow G(a_1, \dots, a_k) > 0$.
2. $\{a_1, \dots, a_k\}$ gehe aus $\{b_1, \dots, b_k\}$ vermöge der Übergangsmatrix $M = (m_{ij})_{i,j=1, \dots, k}$ hervor:

$$a_i = \sum_{j=1}^k m_{ij} b_j \quad (i = 1, \dots, k).$$

Dann gilt

$$G(a_1, \dots, a_k) = (\det M)^2 G(b_1, \dots, b_k).$$

3. Die Menge

$$\mathcal{P}(a_1, \dots, a_k) := \left\{ \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \ (i = 1, \dots, k) \right\}$$

heißt das von $\{a_1, \dots, a_k\}$ aufgespannte Parallelepipid (Parallelotop, k -Spat). Für $k = 2$ ist die Bezeichnung Parallelogramm üblich. Es gilt:

$$v(\mathcal{P}(a_1, \dots, a_k)) \left[= \text{Volumen von } \mathcal{P}(a_1, \dots, a_k) \right] = [G(a_1, \dots, a_k)]^{1/2}. \quad \blacksquare$$

Motivation für die Definition des Inhaltes von Teilmengen von \mathcal{M}^{n-1}

Wir nehmen an, daß \mathcal{M}^{n-1} mit Hilfe einer Parameterdarstellung (T, ψ) beschrieben wird: $\mathcal{M}^{n-1} = \psi(T)$, wobei

$$T \subset \mathbb{R}^{n-1} \text{ offen, } \psi \in C^1(T, \mathbb{R}^n), \text{ mit} \\ \text{Rang } \psi'(t) = n - 1 \quad \forall t \in T, \psi \text{ injektiv, } \psi^{-1} \text{ stetig.}$$

Es ist

$$\psi'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t_1}(t) & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial t_{n-1}}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial t_1}(t) & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial t_{n-1}}(t) \end{pmatrix}$$

Die Spaltenvektoren dieser Matrix bilden eine Basis im Tangentialraum $T_{\psi(t)}(\mathcal{M}^{n-1})$.

Wir fixieren einen Punkt $x_0 = \psi(t_0) \in \mathcal{M}^{n-1}$ ($t_0 \in T$). Sei $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ die Standard-Basis in \mathbb{R}^{n-1} . Für

$$\begin{aligned} W_r &= W_r(t_0) := [t_{01}, t_{01} + r] \times \dots \times [t_{0,n-1}, t_{0,n-1} + r] \\ &= \{t \in \mathbb{R}^{n-1} \mid t = t_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j e_j, 0 \leq \lambda_j \leq r\} = \\ &= \text{Würfel in } \mathbb{R}^{n-1} \text{ mit einem Eckpunkt in } t_0 \text{ und Kantenlänge } r \end{aligned}$$

gilt:

$$v(W_r) [= (n-1)\text{-dimensionales Volumen von } W_r] = r^{n-1}.$$

Wir setzen

$$\tau_j := \psi'(t_0)e_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t_j}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial t_j}(t_0) \end{pmatrix} \quad (j = 1, \dots, n-1)$$

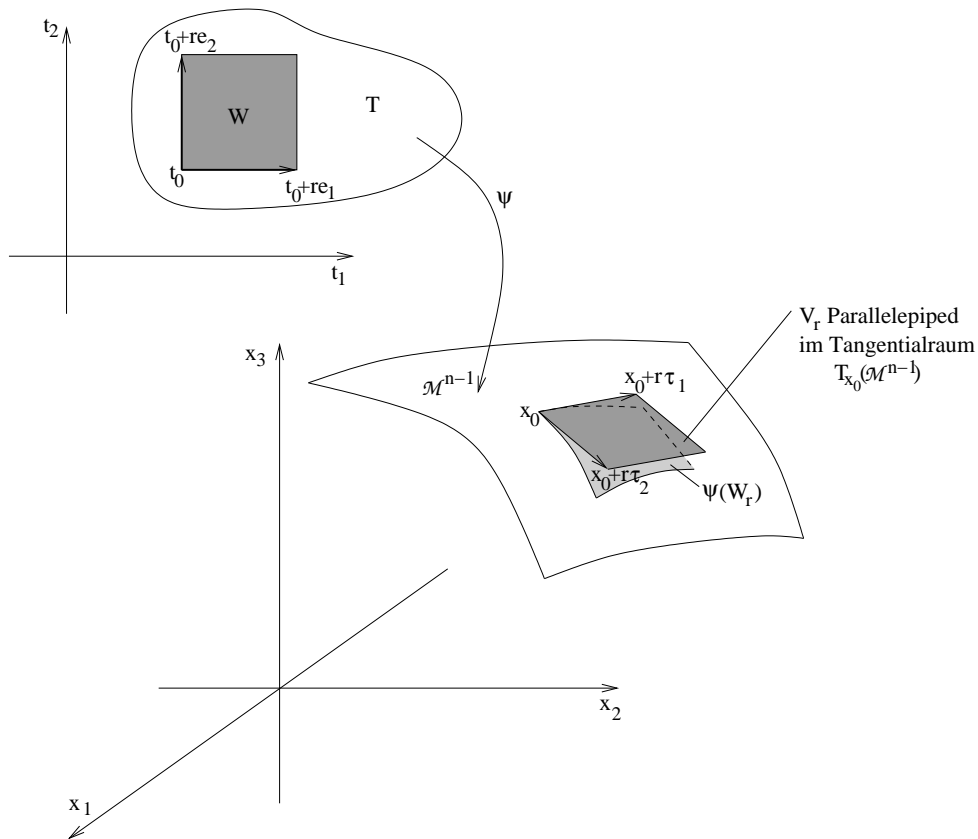
Sei $W_r \subset T$. Dann erhält man für $t \in W_r$

$$\psi(t) = \psi(t_0) + \psi'(t_0)(t - t_0) + \omega(t_0; t) = x_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \tau_j + \omega(t_0; t),$$

wobei $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\omega(t_0; t)}{\|t - t_0\|} = 0$. Die Menge

$$\begin{aligned} V_r &:= \{x_0\} + \psi'(t_0)(W_r - \{t_0\}) \\ &= \{x_0\} + \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \tau_j, 0 \leq \lambda_j \leq r\} \\ &= \{x_0\} + \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j (r\tau_j), 0 \leq \sigma_j \leq 1\} \end{aligned}$$

ist ein $(n-1)$ -dimensionales Parallelepiped, das von den Vektoren $r\tau_1, \dots, r\tau_{n-1}$ aufgespannt wird und daher im Tangentialraum $T_{x_0}(\mathcal{M}^{n-1})$ liegt. Das Volumen $v(V_r)$ des Parallelepipedes ist eine Approximation für den zu definierenden Inhalt von $\psi(W_r)$. Die Güte dieser Approximation kann mit Hilfe von $\omega(t_0; t)$ charakterisiert werden (siehe Abb.). Wir erhalten



$\mu(V_r)$ approximiert den Flächeninhalt von $\psi(W_r)$

$$\begin{aligned}
 v(V_r) &= v\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j(r\tau_j), 0 \leq \sigma_j \leq 1\right\}\right) \\
 &= \left[G(r\tau_1, \dots, r\tau_{n-1})\right]^{1/2} \\
 &= r^{n-1} \left[G(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})\right]^{1/2},
 \end{aligned}$$

also

$$v(V_r) = \left[G(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})\right]^{1/2} v(W_r).$$

Für die GRAMsche Determinante der Tangentialvektoren $\left\{\frac{\partial\psi}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial\psi}{\partial t_{n-1}}(t)\right\}$ führen wir die folgende Bezeichnung ein: ■

$$G_\psi(t) := G\left(\frac{\partial\psi}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial\psi}{\partial t_{n-1}}(t)\right).$$

Mit den obigen Bezeichnungen gilt dann

$$G_\psi(t_0) = G(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}).$$

Wegen

$$v(V_r) = \int_{W_r} \sqrt{G_\psi(t_0)} dt = \int_{W_r} \sqrt{G_\psi(t)} dt + \alpha(r),$$

wobei

$$\alpha(r) = \int_{W_r} \left(\sqrt{G_\psi(t_0)} - \sqrt{G_\psi(t)} \right) dt \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow 0$$

bildet also das Volumen infinitesimaler „Parallelepipede“ V_r im Tangentialraum $T_{x_0}(\mathcal{M}^{n-1})$ für „hinreichend kleine $r > 0$ “ eine Approximation für den zu definierenden Inhalt des „infinitesimalen Flächenstücks“ $\psi(W_r)$. Diese Betrachtung wird nun für eine „große Anzahl“ von Punkten $t_0 \in \mathcal{M}^{n-1}$ durchgeführt. Dies führt zu folgender Definition

$$\text{Inhalt von } \mathcal{M}^{n-1} := \int_T \sqrt{G_\psi(t)} dt.$$

Dieser Inhaltsbegriff motiviert die Definition des Integrals für eine stetige beschränkte Funktion $f : \mathcal{M}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\text{Integral von } f \text{ über } \mathcal{M}^{n-1} := \int_T f(\psi(t)) \sqrt{G_\psi(t)} dt.$$

■

Bei der Betrachtung k -dimensionaler Untermannigfaltigkeiten ($1 \leq k < n - 1$) des \mathbb{R}^n erhält man analog

$$v(V_r) = \left[G \left(\frac{\partial \psi}{\partial t_1}(t_0), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial t_k}(t_0) \right) \right]^{1/2} v(W_r).$$

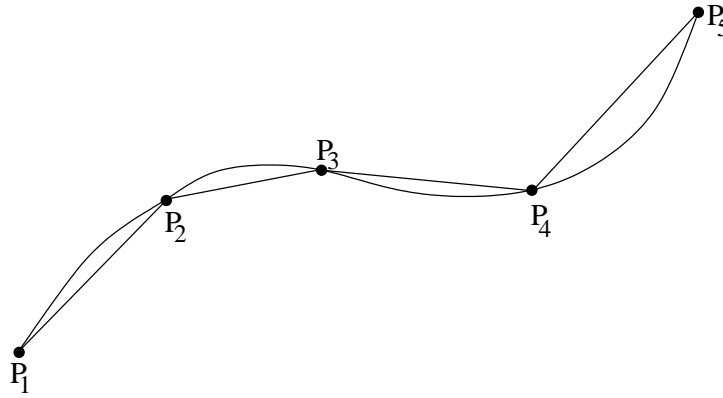
(hier ist $v(W_r)$ das Volumen des k -dimensionalen Würfels W_r). Es gilt

$$\begin{aligned} G_\psi(t) &:= G \left(\frac{\partial \psi}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial t_k}(t) \right) = \det \left(\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t_i}, \frac{\partial \psi}{\partial t_j} \right\rangle_{i,j=1,\dots,k} \right) = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \left[\det \left((\psi'(t))_{i_1 \dots i_k} \right) \right]^2. \end{aligned}$$

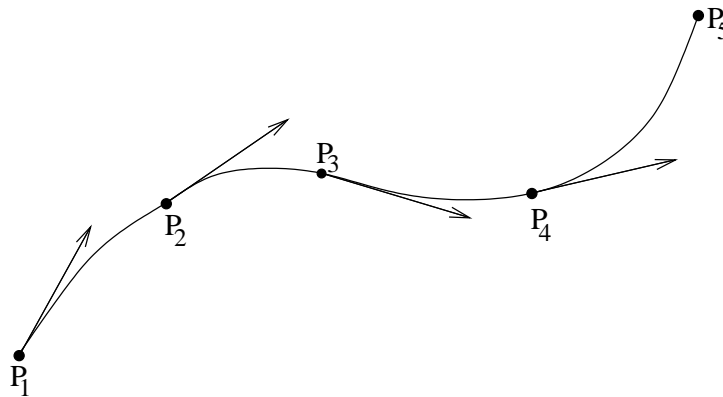
Die Begriffe „Inhalt von \mathcal{M}^k “ und „Integral von $f : \mathcal{M}^k \rightarrow \mathbb{R}$ “ können analog wie für $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten motiviert werden. Im folgenden Abschnitt werden diese detailliert dargestellt.

■

Bemerkungen 1. Der Begriff des Flächeninhaltes einer gekrümmten Fläche weist eine gewisse Analogie zum Begriff der Länge einer Kurve auf. Die Länge einer Kurve wurde definiert als das Supremum der Längen aller einbeschriebenen Polygonzüge. Im Falle einer



Die Länge eines einbeschriebenen Polygonzuges (= Vereinigung der Sehnen $\overline{P_i P_{i+1}}$ ($i = 1, \dots, 4$)) ist eine Approximation für die Länge der Kurve.



Die Summe der Längen von Streckenabschnitten auf den Tangenten in P_1, \dots, P_4 ergibt ebenfalls eine Approximation für die Länge einer Kurve.

Fläche (im \mathbb{R}^3) wäre es natürlich, deren Inhalt als das Supremum des Inhaltes aller einbeschriebenen Polyederflächen zu definieren, wobei der Durchmesser der Teilflächen beliebig klein gewählt werden kann.

H.A. SCHWARZ zeigte jedoch, daß schon in dem einfachen Fall einer Zylinder-Mantelfläche dieses Supremum von der Konstruktion der Polyederflächen abhängen und sogar gleich Unendlich werden kann. Daher kann der Inhalt einer gekrümmten Fläche nicht mit Hilfe eines Grenzprozesses einbeschriebener Polyederflächen definiert werden.

Die oben motivierte Definition des Inhaltes einer „gekrümmten“ Fläche basiert darauf, daß der Inhalt eines Parallelepipedes, welches in einer Tangentialebene an die Fläche in x_0 liegt, den Inhalt eines „kleinen Stücks“ dieser Fläche um dem Punkt x_0 „gut approximiert“.

2. Die oben skizzierte Motivation der Definition des Flächenstückes kann auch bei Verwendung der LEBESGUESchen Maß- und Integrationstheorie benutzt werden. ■

3.2 Integral auf Untermannigfaltigkeiten

Definition 3.1 Sei \mathcal{M}^k eine C^m -UMF des \mathbb{R}^n mit der Parameterdarstellung $\{T, \psi\}$, d. h. $\mathcal{M}^k = \psi(T)$, wobei

$\psi \in C^m(T; \mathbb{R}^n)$ ($T \subset \mathbb{R}^k$ offen), $\text{Rang } \psi'(t) = k \quad \forall t \in T$,

ψ ist injektiv, ψ^{-1} ist stetig.

Außerdem gelte

$$(*) \quad \begin{cases} T \text{ ist beschränkt und } J\text{-meßbar,} \\ \left| \frac{\partial \psi}{\partial t_i}(t) \right| \leq C_0 = \text{const} \quad \forall t \in T \quad (i = 1, \dots, k) \end{cases}$$

1. Sei $f : \mathcal{M}^k \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt.

Integral von f über \mathcal{M}^k :

$$\int_{\mathcal{M}^k} f \, d\mu_k := \int_T f(\psi(t)) \sqrt{G_\psi(t)} \, dt.$$

2. Sei E eine Teilmenge von \mathcal{M}^k , so daß $\psi^{-1}(E)$ J -meßbar ist.

Inhalt von E :

$$\mu_k(E) := \int_{\psi^{-1}(E)} \sqrt{G_\psi(t)} \, dt.$$

Die Definitionen von Integral und Inhalt sind korrekt: Seien $\{T, \psi\}$ und $\{\hat{T}, \hat{\psi}\}$ zwei Parameterdarstellungen für die C^m -UMF $\mathcal{M}^k \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{M}^k = \psi(T) = \hat{\psi}(\hat{T}).$$

Beide Darstellungen mögen der Bedingung $(*)$ genügen.

1. Sei $f : \mathcal{M}^k \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann gilt

$$\int_T f(\psi(t)) \sqrt{G_\psi(t)} \, dt = \int_{\hat{T}} f(\hat{\psi}(s)) \sqrt{G_{\hat{\psi}}(s)} \, ds.$$

2. Sei $E \subseteq \mathcal{M}^k$, so daß $\psi^{-1}(E)$ J -meßbar ist. Dann ist auch $\hat{\psi}^{-1}(E)$ J -meßbar und es gilt

$$\int_{\psi^{-1}(E)} \sqrt{G_\psi(t)} \, dt = \int_{\hat{\psi}^{-1}(E)} \sqrt{G_{\hat{\psi}}(s)} \, ds.$$

In der Tat, die Abbildung

$$\sigma := \hat{\psi}^{-1} \circ \psi : T \rightarrow \hat{T}$$

ist eine C^m -Diffeomorphie (in \mathbb{R}^k) von T auf \hat{T} . Insbesondere ist $\sigma(T) = \hat{T}$. Andererseits gilt

$$\psi = \hat{\psi} \circ \sigma : T \xrightarrow{\sigma} \hat{T} \xrightarrow{\hat{\psi}} \hat{\psi}(T) = \psi(T).$$

Die Kettenregel ergibt

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_i}(t) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial s_j}(\sigma(t)) \frac{\partial \sigma_j}{\partial t_i}(t), \quad t \in T \quad (i = 1, \dots, k).$$

Hierbei ist $\sigma'(t) = \left(\frac{\partial \sigma_j}{\partial t_i}(t) \right)_{i,j=1,\dots,k}$ ein $(k \times k)$ -Matrix, deren Einträge stetige beschränkte Funktionen auf T sind. Aus den Eigenschaften der GRAMschen Matrix (vgl. Abschn. 3.1) folgt

$$G_\psi(t) = (\det \sigma'(t))^2 G_{\hat{\psi}}(\sigma(t)), \quad t \in T.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_T f(\psi(t)) \sqrt{G_\psi(t)} dt &= \int_T f(\hat{\psi}(\sigma(t))) \sqrt{G_\psi(t)} dt \\ &= \int_T f(\hat{\psi}(\sigma(t))) \sqrt{G_{\hat{\psi}}(\sigma(t))} |\det \sigma'(t)| dt \\ &\quad [\text{Transformationsformel}] \\ &= \int_{\hat{T}} f(\hat{\psi}(s)) \sqrt{G_{\hat{\psi}}(s)} ds. \end{aligned}$$

Wegen

$$\mu_k(E) = \int_T \chi_E(\psi(t)) \sqrt{G_\psi(t)} dt$$

kann die zweite Behauptung in analoger Weise wie die erste bewiesen werden. ■

Bemerkung Die Bedingung (*) sichert die Beschränktheit der Funktion $\sqrt{G_\psi(\cdot)}$ auf der offenen Menge T . Da für stetige beschränkte Funktionen $f : \mathcal{M}^k(= \psi(T)) \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f \circ \psi : T \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt auf T ist, so ist

$$\int_T f(\psi(t)) \sqrt{G_\psi}(t) dt$$

als RIEMANN-Integral auf der J.-meßbaren Menge $T \subset \mathbb{R}^k$ wohldefiniert.

Für die Existenz dieses Integrals genügt die folgende schwächere Bedingung:

$$(f \circ \psi) \sqrt{G_\psi} \quad \text{ist } R\text{-integrierbar auf } T .$$

Diese Bedingung an f hängt formal von der Darstellung $\mathcal{M}^k = \psi(T)$ ab. Mit der Notation und Argumentation wie beim Beweis von Satz 3.2 erkennt man jedoch mit Hilfe der Transformationsformel die Unabhängigkeit dieser Bedingung von $\{T, \psi\}$:

$$(f \circ \psi) \sqrt{G_\psi} \quad R\text{-integrierbar auf } T \iff (f \circ \hat{\psi}) \sqrt{G_{\hat{\psi}}} \quad R\text{-integrierbar auf } \hat{T}. \quad \blacksquare$$

Die Definition des Integrals einer stetigen beschränkten Funktion auf einer $C^m - UMF$

$$\mathcal{M}^k = \bigcup_{\alpha=1}^p \psi_\alpha(T_\alpha)$$

werden wir durch "Lokalisierung" auf die Definition des Integrals über $\psi_\alpha(T_\alpha)$ zurückführen. Hierzu benutzen wir eine "Zerlegung der Eins".

Definition

1. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \neq \emptyset$. Als **Träger** der Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ wird die Menge

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in E \mid f(x) \neq 0\}} \quad (\text{Abschließung in } \mathbb{R}^n)$$

bezeichnet.

2. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $E \neq \emptyset$.

$$C_c^m(E) := \{f \in C^m(E) \mid \text{supp}(f) \text{ kompakt, } \text{supp}(f) \subset E\}$$

($m = 0, 1, 2, \dots$).

Satz (Zerlegung der Eins) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Es gelte

$$K \subset \bigcup_{i=1}^p E_i,$$

wobei

$$E_i \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, beschränkt } (i = 1, \dots, p).$$

Dann existieren $\zeta_i \in C_c^\infty(E_i)$ ($i = 1, \dots, p$), so daß

$$1) \quad \zeta_i(x) \geq 0 \quad \forall x \in E_i,$$

$$2) \quad \sum_{i=1}^p \zeta_i(x) = 1 \quad \forall x \in K.$$

Das System $\{\zeta_1, \dots, \zeta_p\}$ heißt **Zerlegung der Eins auf** K , die $\{E_1, \dots, E_p\}$ ($K \subset \bigcup_{i=1}^p E_i$) ungeordnet ist.

Definition 3.2 Sei \mathcal{M}^k eine kompakte C^m -UMF des \mathbb{R}^n . Sei $\{(T_\alpha, \psi_\alpha) \mid \alpha = 1, \dots, p\}$ eine Parameterdarstellung für \mathcal{M}^k :

$$\mathcal{M}^k = \bigcup_{\alpha=1}^p \psi_\alpha(T_\alpha);$$

dabei gelte:

$$(**) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_\alpha = (T_\alpha)\mathcal{M} \cap U_\alpha \text{ mit:} \\ T_\alpha \subset \mathbb{R}^k \text{ offen, beschränkt, } J\text{-meßbar; } U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, beschränkt;} \\ \psi_\alpha \in C^m(T_\alpha; \mathbb{R}^n), \text{ Rang } \psi'_\alpha(t) = k \quad \forall t \in T_\alpha, \\ \psi_\alpha \text{ injektiv, } \psi_\alpha^{-1} \text{ stetig.} \end{array} \right.$$

Sei $\{\zeta_1, \dots, \zeta_p\}$ eine Zerlegung der Eins auf \mathcal{M}^k , die $\{U_1, \dots, U_p\}$ untergeordnet ist.

1. Sei $f : \mathcal{M}^k \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Integral von f über \mathcal{M}^k :

$$\int_{\mathcal{M}^k} f d\mu_k := \sum_{\alpha=1}^p \int_{T_\alpha} f(\psi_\alpha(t)) \zeta_\alpha(\psi_\alpha(t)) \sqrt{G_{\psi_\alpha}(t)} dt.$$

2. Sei E eine Teilmenge von \mathcal{M}^k , so daß $\psi_\alpha^{-1}(E)$ J -meßbar für alle $\alpha = 1, \dots, p$ ist.

Inhalt von E :

$$\mu_k(E) := \sum_{\alpha=1}^p \int_{\psi_\alpha^{-1}(E)} \zeta_\alpha(\psi_\alpha(t)) \sqrt{G_{\psi_\alpha}(t)} dt.$$

Bemerkung Beachtet man, daß $\sum_{\alpha=1}^p \zeta_\alpha(x) = 1$ für alle $x \in \mathcal{M}^k$ und $\text{supp}(\zeta_\alpha) \subset U_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, p$) gilt, so kann die Definition des Integrals wie folgt *formal* motiviert werden:

$$\int_{\mathcal{M}^k} f d\mu_k = \sum_{\alpha=1}^p \int_{\mathcal{M}^k} f \zeta_\alpha d\mu_k = \sum_{\alpha=1}^p \int_{\mathcal{M}^k \cap U_\alpha} f \zeta_\alpha d\mu_k.$$

Das Integral von $f \zeta_\alpha$ über $\mathcal{M}^k \cap U_\alpha$ ist nun gemäß Definition 3.1/1 erklärt. ■

Das soeben definierte Integral ist linear im üblichen Sinne: Für stetige Funktionen $f, g : \mathcal{M}^k \rightarrow \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{\mathcal{M}^k} (f + g) d\mu_k = \int_{\mathcal{M}^k} f d\mu_k + \int_{\mathcal{M}^k} g d\mu_k, \quad \int_{\mathcal{M}^k} (\lambda f) d\mu_k = \lambda \int_{\mathcal{M}^k} f d\mu_k.$$

Die Definitionen von Integral und Inhalt sind korrekt: Die kompakte C^m -UMF $\mathcal{M}^k \subset \mathbb{R}^n$ besitze die Parameterdarstellungen

$$\mathcal{M}^k = \bigcup_{\alpha=1}^p \psi_\alpha(T_\alpha) = \bigcup_{\beta=1}^q \hat{\psi}_\beta(\hat{T}_\beta);$$

dabei sei für beide Parameterdarstellungen (sinngemäß) Bedingung (**) erfüllt ($\psi_\alpha(T_\alpha) = \mathcal{M}^k \cap U_\alpha$, $\hat{\psi}_\beta(\hat{T}_\beta) = \mathcal{M}^k \cap \hat{U}_\beta$).

Seien $\{\zeta_1, \dots, \zeta_p\}$ und $\{\hat{\zeta}_1, \dots, \hat{\zeta}_q\}$ Zerlegungen der Eins auf \mathcal{M}^k , die $\{U_1, \dots, U_p\}$ bzw. $\{\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_q\}$ untergeordnet sind.

1. Für jede stetige Funktion $f : \mathcal{M}^k \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{\alpha=1}^p \int_{T_\alpha} (f \circ \psi_\alpha) (\zeta_\alpha \circ \psi_\alpha) \sqrt{G_{\psi_\alpha}} dt = \sum_{\beta=1}^q \int_{\hat{T}_\beta} (f \circ \hat{\psi}_\beta) (\hat{\zeta}_\beta \circ \hat{\psi}_\beta) \sqrt{G_{\hat{\psi}_\beta}} ds.$$

2. Sei $E \subseteq \mathcal{M}^k$, so daß $\psi_\alpha^{-1}(E)$ J -meßbar ist für alle $\alpha = 1, \dots, p$. Dann ist $\hat{\psi}_\beta^{-1}(E)$ J -meßbar für alle $\beta = 1, \dots, q$ und es gilt

$$\sum_{\alpha=1}^p \int_{\psi_\alpha^{-1}(E)} (\zeta_\alpha \circ \psi_\alpha) \sqrt{G_{\psi_\alpha}} dt = \sum_{\beta=1}^q \int_{\hat{\psi}_\beta^{-1}(E)} (\hat{\zeta}_\beta \circ \hat{\psi}_\beta) \sqrt{G_{\hat{\psi}_\beta}} ds.$$

Wir beweisen die erste der beiden Behauptungen. Die Abbildung $\sigma_{\alpha\beta} := \hat{\psi}_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha$ ist eine C^m -Diffeomorphie von T_α auf \hat{T}_β . Ebenso wie beim Beweis der Korrektheit der Definition 3.1/1 des Integrals erhält man

$$\begin{aligned} & \int_{T_\alpha} (f \circ \psi_\alpha) (\zeta_\alpha \circ \psi_\alpha) (\hat{\zeta}_\beta \circ \psi_\alpha) \sqrt{G_{\psi_\alpha}} dt = \\ &= \int_{T_\alpha} (f \circ (\hat{\psi}_\beta \circ \sigma_{\alpha\beta})) (\zeta_\alpha \circ (\hat{\psi}_\beta \circ \sigma_{\alpha\beta})) (\hat{\zeta}_\beta \circ (\hat{\psi}_\beta \circ \sigma_{\alpha\beta})) \sqrt{G_{\psi_\alpha}} dt \\ & \quad [\text{Transformationsformel}] \\ &= \int_{\hat{T}_\beta} (f \circ \hat{\psi}_\beta) (\zeta_\alpha \circ \hat{\psi}_\beta) (\hat{\zeta}_\beta \circ \hat{\psi}_\beta) \sqrt{G_{\hat{\psi}_\beta}} ds. \end{aligned}$$

Beachtet man daß

$$\sum_{\beta=1}^q \hat{\zeta}_{\beta}(\psi_{\alpha}(t)) = 1 \quad \forall t \in T_{\alpha}, \quad \sum_{\alpha=1}^p \zeta_{\alpha}(\hat{\psi}_{\beta}(s)) = 1 \quad \forall s \in \hat{T}_{\beta},$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^p \int_{T_{\alpha}} (f \circ \psi_{\alpha}) (\zeta_{\alpha} \circ \psi_{\alpha}) \sqrt{G_{\psi_{\alpha}}} dt = \\ &= \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=1}^q \int_{T_{\alpha}} (f \circ \psi_{\alpha}) (\zeta_{\alpha} \circ \psi_{\alpha}) (\hat{\zeta}_{\beta} \circ \psi_{\alpha}) \sqrt{G_{\psi_{\alpha}}} dt \\ &= \sum_{\beta=1}^q \sum_{\alpha=1}^p \int_{\hat{T}_{\beta}} (f \circ \hat{\psi}_{\beta}) (\zeta_{\alpha} \circ \hat{\psi}_{\beta}) (\hat{\zeta}_{\beta} \circ \hat{\psi}_{\beta}) \sqrt{G_{\hat{\psi}_{\beta}}} ds \\ &= \sum_{\beta=1}^q \int_{\hat{T}_{\beta}} (f \circ \hat{\psi}_{\beta}) (\hat{\zeta}_{\beta} \circ \hat{\psi}_{\beta}) \sqrt{G_{\hat{\psi}_{\beta}}} ds. \end{aligned}$$

■

4. Integralsätze

”... und zwar lautet der Fundamentalsatz bei einer unabhängigen Veränderlichen folgendermaßen: Ist $f(x)$ eine im abgeschlossenen Bereich $a \leq x \leq b$ stetige Funktion, so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

wenn $F(x)$ eine primitive Funktion von $f(x)$ ist; umgekehrt können wir zu jeder Funktion $F(x)$ mit stetiger Ableitung die gemäß der obigen Formel zugehörige Funktion $f(x) = F'(x)$ konstruieren. Das Wesentliche für uns ist hier der erste Teil des Fundamentalsatzes, d. h. die Verwandlung eines Gebietsintegrals über einen ein-dimensionalen Bereich in den nur von den Randpunkten – einem, wie wir sagen wollen, null-dimensionalen Bereich – abhängigen Ausdruck $F(b) - F(a)$

Etwas ganz Ähnliches wie der Fundamentalsatz bei einer unabhängigen Veränderlichen leisten nun unsere verschiedenen Integralsätze in Bereichen von mehreren Veränderlichen. Es handelt sich stets darum, ein Integral über einen gewissen im Bereich der unabhängigen Veränderlichen gelegenen Integrationsbereich, mag dieser aus einer Kurve, einem Flächenstück, einem Raumstück bestehen, in einen Ausdruck zu verwandeln, der nur vom Rande dieses Bereiches abhängt.”³⁾

³⁾ COURANT, R.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. 2. Band: Funktionen mehrerer Veränderlicher. 3. Aufl., Neudruck; Springer-Verlag, Berlin 1963; S. 357-358.

Unsere Darstellung der klassischen Integralsätze stimmt im wesentlichen mit den soeben zitierten Überlegungen von R. COURANT überein. Zunächst definieren wir eine Klasse von Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, die eine "Verwandlung eines Integrals über Ω in ein Integral über den Rand $\partial\Omega$ " gestatten. Für solche Gebiete beweisen wir eine Aussage, die den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bei einer unabhängigen Veränderlichen für den Fall von Funktionen mehrerer Veränderlicher verallgemeinert. Aus dieser Aussage folgern wir die klassischen Integralsätze.

4.1 Gebiete der Klasse C^m

Im gesamten Abschnitt 4 betrachten wir beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, deren Rand $\partial\Omega$ eine $(n-1)$ -dimensionale C^m -UMF des \mathbb{R}^n ist. Für die Beschreibung von $\partial\Omega$ als Untermannigfaltigkeit benutzen wir die lokale Darstellung als Graph einer Funktion; diese Darstellung muß außerdem die in Abschn. ... entwickelte Integration über $\partial\Omega$ gestatten.

Definition 4.1 Das beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Gebiet der Klasse C^m** ($m \in \mathbb{N}$) [Bezeichnung: $\Omega \in C^m$], wenn für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ existieren

1. $W = W' \times W''$, wobei:

$$W' = W'(x'_0) \subset \mathbb{R}^{n-1} \text{ Umgebung von } x'_0, \quad W' \text{ J.-meßbar,}$$

$$W'' = W''(x_{0,n}) \subset \mathbb{R} \text{ Intervall } \ni x_{0,n} (x_0 = (x'_0, x_{0,n})),$$

2. $g \in C^m(W'; \mathbb{R})$ mit $\left| \frac{\partial g}{\partial y_i}(y') \right| \leq C_0 = \text{const } \forall y' \in W' \quad (i = 1, \dots, n-1)$,

3. $\eta > 0$,

so daß

a) $\partial\Omega \cap (W' \times W'') = \left\{ y = (y', y_n) \in W' \times W'' \mid y_n = g(y') \right\}$,

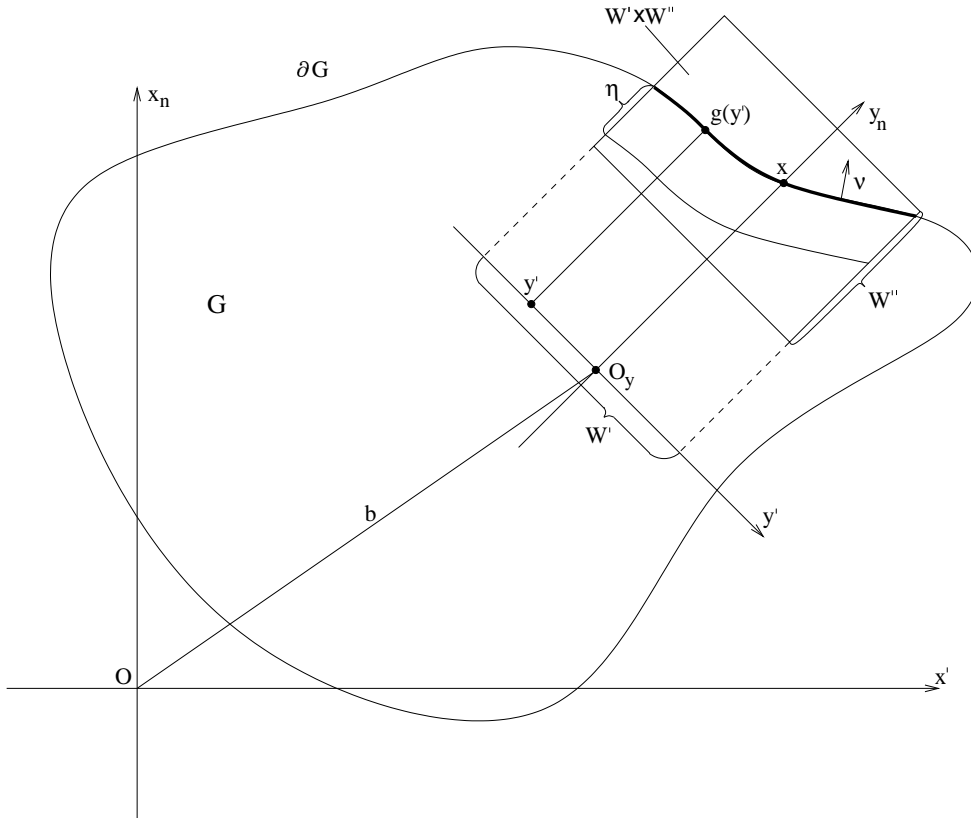
b) $\left\{ y = (y', y_n) \in W' \times W'' \mid g(y') - \eta < y_n < g(y') \right\} \subset \Omega \cap (W' \times W'')$.

Sei $[O; x_1, \dots, x_n]$ ein fixiertes kartesisches Koordinatensystem, in dem das Gebiet Ω beschrieben wird. $\Omega \in C^m$ bedeutet insbesondere, daß die Untermannigfaltigkeit $\partial\Omega$ lokal als Graph einer Funktion g bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems $[O_y; y_1, \dots, y_n]$ charakterisiert werden kann; dabei möge das lokale Koordinatensystem $[O_y; y_1, \dots, y_n]$ die gleiche Orientierung wie $[O; x_1, \dots, x_n]$ besitzen. Beide Koordinatensysteme gehen durch eine Drehung und Verschiebung auseinander hervor:

$$x = Ay + b, \quad y = A^T(x - b),$$

wobei

$$A = \text{orthogonale Matrix mit } \det A = 1, \quad b \in \mathbb{R}^n.$$



Im Punkt $(y', g(y')) \in \partial\Omega$ sind im lokalen Koordinatensystem $[O_y; y_1, \dots, y_n]$ die Tangentialvektoren $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ und der bezüglich Ω äußere Normaleneinheitsvektor ν gegeben durch

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y_1} \end{pmatrix}, \dots, \tau_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \frac{\partial g}{\partial y_{n-1}} \end{pmatrix}, \quad \nu = \frac{1}{(1 + |\nabla g|^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial y_{n-1}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$|\nu| = 1, \quad \langle \nu, \tau_i \rangle = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

(EUKLIDISCHE Norm und Skalarprodukt in $[O_y; y_1, \dots, y_n]$). ■

Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Ebenso wie die in Definition 4.1 eingeführten Mengen W' und W'' , die Funktion g und die positive reelle Zahl η hängen auch die Matrix A und der konstante Verschiebungsvektor b von x_0 ab. Die folgenden Bezeichnungen berücksichtigen diese Abhängigkeit:

- $\phi_{x_0}(y) := A_{x_0}y + b_{x_0}$;
- $V_{x_0}^- := \left\{ y = (y', y_n) \in W' \times W'' \mid g(y') - \eta < y_n < g(y') \right\}$,
 $V_{x_0} := \left\{ y = (y', y_n) \in W' \times W'' \mid g(y') - \eta < y_n < g(y') + \eta \right\}$
 $(W' = W'_{x_0}, W'' = W''_{x_0}, g = g_{x_0}, \eta = \eta_{x_0})$;
- $U_{x_0} := \phi_{x_0}(V_{x_0})$.

Es folgt

$$\Omega \cap U_{x_0} = \phi_{x_0}(V_{x_0}^-), \quad \partial\Omega \subset \bigcup_{x_0 \in \partial\Omega} U_{x_0}. \quad (4.1)$$

Da $\partial\Omega$ kompakt ist, existieren Punkte $x_\alpha \in \partial\Omega$ ($\alpha = 1, \dots, p$), so daß $\partial\Omega \subset \bigcup_{\alpha=1}^p U_{x_\alpha}$.

Wir setzen für $\alpha = 1, \dots, p$:

$$\begin{aligned} A_\alpha &:= A_{x_\alpha}, & b_\alpha &:= b_{x_\alpha}, & \phi_\alpha &:= \phi_{x_\alpha}; \\ W'_\alpha &:= W'_{x_\alpha}; \\ V_\alpha^- &:= V_{x_\alpha}^-, & V_\alpha &:= V_{x_\alpha}, & g_\alpha &:= g_{x_\alpha}, & \eta_\alpha &:= \eta_{x_\alpha}; \\ U_\alpha &:= U_{x_\alpha}. \end{aligned}$$

Aus (4.1) folgt die Existenz einer offenen Menge $U_0 \subset \mathbb{R}^n$, so daß

$$\overline{U_0} \subset \Omega, \quad \overline{\Omega} \subset \bigcup_{\alpha=0}^p U_\alpha. \quad (4.2)$$

■

Wir definieren nun den Begriff der äußeren Einheitsnormale $\eta : \partial\Omega \rightarrow S^{n-1}$ ($= \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| = 1\}$) im Kontext der soeben eingeführten Bezeichnungen.

Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Dann ist $x_0 \in \partial\Omega \cap U_\alpha$ für (wenigstens) ein $\alpha \in \{1, \dots, p\}$. Sei $[O_y; y_1, \dots, y_n]$ das lokale Koordinatensystem, in dem $\partial\Omega \cap U_\alpha$ gemäß Definition 4.1 als Graph einer Funktion $g_\alpha \in C^m(W'_\alpha; \mathbb{R})$ dargestellt wird. $[O_y; y_1, \dots, y_n]$ geht aus $[O; x_1, \dots, x_n]$ durch Anwendung der affin-linearen Abbildung ϕ_α^{-1} hervor.

Wir definieren für $x \in \partial\Omega \cap U_\alpha$:

$$\nu \Big|_{\partial\Omega \cap U_\alpha}(x) := A_\alpha \nu(\phi_\alpha^{-1}(x));$$

auf der rechten Seite dieser Gleichung ist $\nu(y) = \nu(y', g_\alpha(y'))$ die äußere Einheitsnormale bezüglich Ω in $y = \phi_\alpha^{-1}(x)$ im lokalen Koordinatensystem $[O_y; y_1, \dots, y_n]$.

Proposition 4.2 Für die Abbildung $\nu : \partial\Omega \rightarrow S^{n-1}$ gilt:

1. Sei $(\partial\Omega \cap U_\alpha) \cap (\partial\Omega \cap U_\beta) \neq \emptyset$. Dann gilt

$$A_\alpha \nu(\phi_\alpha^{-1}(x)) = A_\beta \nu(\phi_\beta^{-1}(x)) \quad \forall x \in \partial\Omega \cap U_\alpha \cap U_\beta.$$

[Unabhängigkeit von $\nu(x)$ von der lokalen Darstellung von $\partial\Omega$ um x];

2. $\lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \xi \in \partial\Omega, \xi \neq x}} \frac{\langle \nu(x), \xi - x \rangle}{|\xi - x|} = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega;$
 3. $|\nu(x)| = 1 \quad \forall x \in \partial\Omega$ ⁴⁾;
 4. $\forall x \in \partial\Omega \quad \exists \sigma = \sigma(x) > 0 :$

$$(x + \lambda \nu(x)) \in \begin{cases} \Omega & \forall \lambda \in]-\sigma, 0[\\ \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} & \forall \lambda \in]0, \sigma[\end{cases}$$

Beweis

4.2 Eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

Sei E eine offene beschränkte Teilmenge von \mathbb{R}^k ($1 \leq k \leq n$).

Definition 4.3 Für $m = 1, 2, \dots$ sei

$$\bar{C}^m(E) := \left\{ f \in C(\bar{E}) \mid f|_E \in C^m(E), \forall \text{ Multiindizes } \alpha \text{ mit } 1 \leq |\alpha| \leq m \text{ ist } D^\alpha f \text{ gleichmäßig stetig in } E \right\}.$$

Für eine Funktion $f \in \bar{C}^m(E)$ können die partiellen Ableitungen $D^\alpha f$ ($1 \leq |\alpha| \leq m$) stetig von E auf \bar{E} fortgesetzt werden, d.h. für jeden Multiindex α mit $1 \leq |\alpha| \leq m$ existiert eine wohlbestimmte Funktion $w_\alpha \in C(\bar{E})$, so daß

$$w_\alpha|_E = D^\alpha f$$

Die Funktionen w_α bezeichnen wir wieder mit dem Symbol $D^\alpha f$.

Bemerkung. Wir benutzen die Bezeichnung $\bar{C}^m(E)$ um darauf hinzuweisen, daß dieser Vektorraum von der Menge E (und nicht nur von \bar{E}) abhängen kann. Genauer: Sei $E_0 \subset \mathbb{R}^k$ eine offene Menge mit

$$E_0 \subset \bar{E}, \quad E_0 \neq E \text{ und } \bar{E}_0 = \bar{E}.$$

Dann ist

$$\bar{C}^m(E_0) \neq \bar{C}^m(E)$$

möglich. Ein Beispiel, das dies belegt, kann mit Hilfe der CANTORSchen Treppenfunktion konstruiert werden.

⁴⁾In 2. und 3. bedeuten $|\cdot|$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ EUKLIDISCHE Norm und Skalarprodukt in $[O; x_1, \dots, x_n]$.

Wenn

$$E = \text{Int}(\bar{E}),$$

d.h. E ist die größte offene Teilmenge von \bar{E} , so ist der in Definition 4.3 eingeführte Funktionenraum eindeutig durch E bestimmt. In diesem Falle schreiben wir (wie üblich) $C^m(\bar{E})$ anstelle von $\bar{C}^m(E)$. ■

Für Funktionen $f \in C^1([a, b])$ kann der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in der Form

$$\int_a^b f'(t) dt = (-1) \cdot f(a) + 1 \cdot f(b)$$

geschrieben werden. Das folgende Resultat verallgemeinert diese Aussage für den Fall von Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Satz 4.4 Sei $\Omega \in C^1$. Für $f \in C^1(\bar{\Omega})$ gilt:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} f \nu_i d\mu_{n-1} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.3)$$

Das Integral auf der rechten Seite von (4.3) ist als Integral der stetigen Funktion $f \nu_i$ auf der $(n-1)$ -dimensionalen C^1 -UMF $\partial\Omega$ gemäß Abschn. 3.2 wohldefiniert.

Beweis von Satz 4.4 (in drei Schritten).

1 Für $h \in C_c^1(\Omega)$ gilt

$$\int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial x_i} dx = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Beweis Wir setzen h durch Null auf $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ fort und bezeichnen die so erhaltene Funktion wieder mit h . Für diese gilt $h \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und $\text{supp}(h) \subset \Omega$.

Sei $Q = [-a, a]^n$ ($a > 0$) ein Würfel in \mathbb{R}^n , so daß $\bar{\Omega} \subset Q$. Auf den Seitenflächen des Würfels Q ist $h = 0$. Daher gilt

$$\int_{-a}^a \frac{\partial h}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n) dt = h(a, x_2, \dots, x_n) - h(-a, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Mit Hilfe des Satzes von FUBINI folgt nun

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial x_1} dx &= \int_Q \frac{\partial h}{\partial x_1} dx \\ &= \int_{-a}^a \dots \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a \frac{\partial h}{\partial x_1} dx_1 \right) d(x_2 \dots x_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Eine analoge Überlegung wird für $i = 2, \dots, n$ durchgeführt.

2 (Betrachtung in einem lokalen Koordinatensystem $[O_y; y_1, \dots, y_n]$).

Für $h \in C^1(\overline{V_\alpha^-})$ mit

$$\text{supp}(h) \subset V_\alpha^- \cup \{y = (y', y_n) \mid y' \in W'_\alpha, y_n = g_\alpha(y')\} \quad (4.4)$$

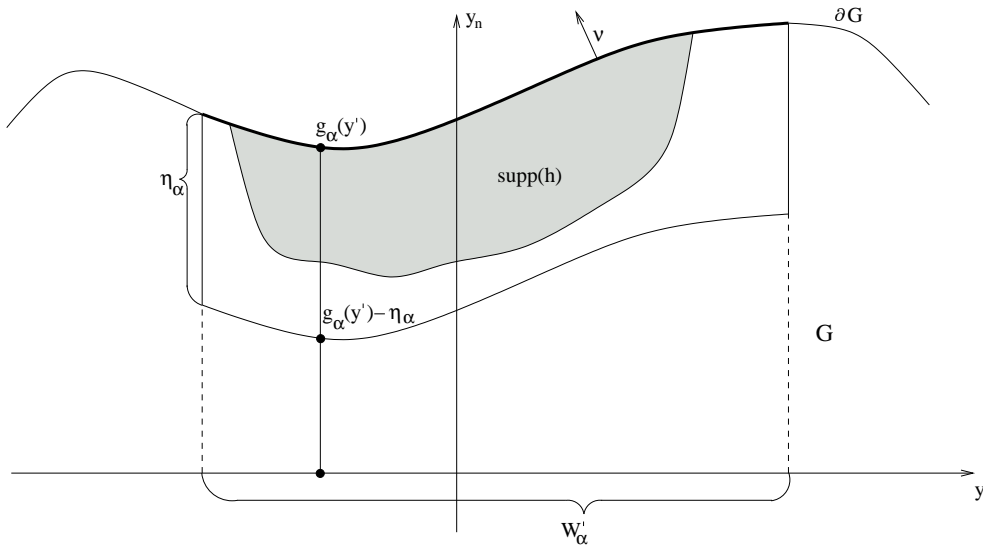
gilt

$$\int_{V_\alpha^-} \frac{\partial h}{\partial y_i}(y) dy = \int_{W'_\alpha} h(y', g_\alpha(y')) \nu_i(y', g_\alpha(y')) (1 + |\nabla g_\alpha(y')|^2)^{1/2} dy' \quad (i = 1, \dots, n).$$

wobei

$$\nu_i(y', g_\alpha(y')) := -\frac{\frac{\partial g_\alpha}{\partial y_i}(y')}{(1 + |\nabla g_\alpha(y')|^2)^{1/2}} \quad (i = 1, \dots, n-1),$$

$$\nu_n(y', g_\alpha(y')) := \frac{1}{(1 + |\nabla g_\alpha(y')|^2)^{1/2}} \quad (y' \in W'_\alpha).$$



Beweis Um die Schreibweise zu vereinfachen, unterdrücken wir den Index α bei der Ausführung des Beweises.

1. Fall : $i = 1, \dots, n-1$. Sei $Q' = [-a, a]^{n-1}$ ($a > 0$) ein Würfel in \mathbb{R}^{n-1} , so daß $\overline{W'} \subset Q'$. Wir definieren

$$H(y') := \begin{cases} \int_{g(y')-\eta}^{g(y')} h(y', t) dt & \text{für } y' \in W', \\ 0 & \text{für } y' \in Q' \setminus W' \end{cases}$$

Wegen (4.4) gilt $h(y', y_n) = 0$ für alle y' in einem Randstreifen von W' und für alle $t \in [g(y') - \eta, g(y')]$. Daher ist $H \in C^1(Q')$. Da $H = 0$ auf den Seitenflächen des Würfels Q' gilt, folgt wie in **1**

$$\int_{W'} \frac{\partial H}{\partial y_i} dy' = \int_{-a}^a \dots \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a \frac{\partial H}{\partial y_i} dy_i \right) d(y_1 \dots y_{i-1} y_{i+1} \dots y_{n-1}) = 0.$$

Andererseits erhält man für alle $y' \in W'$

$$\frac{\partial H}{\partial y_i}(y') = \int_{g(y')-\eta}^{g(y')} \frac{\partial h}{\partial y_i}(y', t) dt + [h(y', g(y')) - h(y', g(y') - \eta)] \frac{\partial g}{\partial y_i}(y').$$

Hier gilt $h(y', g(y') - \eta) = 0$ wegen (4.4).

Der Satz von FUBINI ergibt nun

$$\begin{aligned} \int_{V^-} \frac{\partial h}{\partial y_i}(y) dy &= \int_{W'} \left(\int_{g(y')-\eta}^{g(y')} \frac{\partial h}{\partial y_i}(y', y_n) dy_n \right) dy' \\ &= \int_{W'} \left(\frac{\partial H}{\partial y_i}(y') - h(y', g(y')) \frac{\partial g}{\partial y_i}(y') \right) dy' \\ &= - \int_{W'} h(y', g(y')) \frac{\partial g}{\partial y_i}(y') dy' \\ &= \int_{W'} h(y', g(y')) \cdot \frac{-\frac{\partial g}{\partial y_i}(y')}{(1 + |\nabla g(y')|^2)^{1/2}} \cdot (1 + |\nabla g(y')|^2)^{1/2} dy'. \end{aligned}$$

2. Fall : $i = n$. Für $y' \in W'$ gilt

$$\int_{g(y')-\eta}^{g(y')} \frac{\partial h}{\partial y_n}(y', s) ds = h(y', g(y')).$$

Eine abermalige Anwendung des Satzes von FUBINI ergibt

$$\begin{aligned} \int_{V^-} \frac{\partial h}{\partial y_n}(y) dy &= \int_{W'} \left(\int_{g(y')-\eta}^{g(y')} \frac{\partial h}{\partial y_n}(y', y_n) dy_n \right) dy' \\ &= \int_{W'} h(y', g(y')) dy' \\ &= \int_{W'} h(y', g(y')) \cdot \frac{1}{(1 + |\nabla g(y')|^2)^{1/2}} \cdot (1 + |\nabla g(y')|^2)^{1/2} dy'. \end{aligned}$$

3 ("Zusammenkleben" der Resultate aus **1** und **2**) Sei $\{\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_p\}$ eine Zerlegung der Eins, die $\{U_0, U_1, \dots, U_p\}$ untergeordnet ist:

$$\zeta_\alpha \in C_c^\infty(U_\alpha), 0 \leq \zeta_\alpha(x) \leq 1 \quad \forall x \in U_\alpha \quad (\alpha = 0, 1, \dots, p), \quad \sum_{\alpha=0}^p \zeta_\alpha(x) = 1 \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Es folgt

$$\sum_{\alpha=0}^p \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial x_i}(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (i = 1, \dots, n).$$

Daher gilt zunächst

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{\alpha=0}^p \zeta_\alpha dx = \sum_{\alpha=0}^p \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (f \zeta_\alpha) dx.$$

Wegen $\text{supp}(f \zeta_0) \subset U_0$ verschwindet das erste Integral in der rechts stehenden Summe dieser Gleichung (siehe **1**). Setzt man zur Vereinfachung der Schreibweise $f_\alpha := f \zeta_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, p$), so ergibt sich

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \sum_{\alpha=1}^p \int_{\Omega \cap U_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} dx. \quad (4.5)$$

Jedes der Integrale in (4.5) über $\Omega \cap U_\alpha$ transformieren wir auf die Variablen y des zur Darstellung $\Omega \cap U_\alpha = \phi_\alpha(V_\alpha^-)$ gehörenden lokalen Koordinatensystems $[O_y; y_1, \dots, y_n]$ (vgl. (4.1)). Wegen $\phi'_\alpha(y) = A_\alpha$ und $\det A_\alpha = 1$ nimmt die Transformationsformel die Form an

$$\int_{\Omega \cap U_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}(x) dx = \int_{V_\alpha^-} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}(\phi_\alpha(y)) dy. \quad (4.6)$$

Der Träger der Funktion $f_\alpha \circ \phi_\alpha$ gehört zur Menge $V_\alpha^- \cup \{(y', y_n) | y' \in W'_\alpha, y_n = g_\alpha(y')\}$. Um **2** anwenden zu können, muß die im Koordinatensystem $[O; x_1, \dots, x_n]$ gebildete partielle Ableitung $\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}$ durch partielle Ableitungen der Funktion $f_\alpha \circ \phi_\alpha$ nach den Veränderlichen y_1, \dots, y_n ausgedrückt werden. Wegen $\frac{\partial \phi_{\alpha k}}{\partial y_j}(y) = A_{\alpha k j}$ ergibt sich aus der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial y_j} (f_\alpha \circ \phi_\alpha)(y) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k}(\phi_\alpha(y)) A_{\alpha k j} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Hieraus folgt

$$\sum_{j=1}^n A_{\alpha i j} \frac{\partial}{\partial y_j} (f_\alpha \circ \phi_\alpha)(y) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k}(\phi_\alpha(y)) \left(\sum_{j=1}^n A_{\alpha k j} A_{\alpha i j} \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}(\phi_\alpha(y))$$

(denn $A_\alpha^T = A_\alpha^{-1}$, also $\sum_{j=1}^n A_{\alpha kj} A_{\alpha ij} = \sum_{j=1}^n A_{\alpha kj} A_{\alpha ji}^T = \delta_{ki}$). Aus **2** erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \int_{V_\alpha^-} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}(\phi_\alpha(y)) dy &= \sum_{j=1}^n A_{\alpha ij} \int_{V_\alpha^-} \frac{\partial}{\partial y_j} (f_\alpha \circ \phi_\alpha)(y) dy \\ &= \sum_{j=1}^n A_{\alpha ij} \int_{W'_\alpha} (f_\alpha \circ \phi_\alpha)(y', g_\alpha(y')) \nu_j(y', g_\alpha(y')) (1 + |\nabla g_\alpha(y')|^2)^{1/2} dy' \\ &= \int_{W'_\alpha} (f_\alpha \circ \phi_\alpha)(y', g_\alpha(y')) (A_\alpha \nu)_i(y', g_\alpha(y')) (1 + |\nabla g_\alpha(y')|^2)^{1/2} dy'; \end{aligned}$$

hier bezeichnet $\nu(y) = \nu(y', g_\alpha(y'))$ die äußere Einheitsnormale bezüglich Ω im lokalen Koordinatensystem $[O_{y'}; y_1, \dots, y_n]$. Damit folgt schließlich

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx &= \sum_{\alpha=1}^p \int_{\Omega \cap U_\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx \\ &= \sum_{\alpha=1}^p \int_{W'_\alpha} (f \zeta_\alpha)(\phi_\alpha(y', g_\alpha(y'))) (A_\alpha \nu)_i(y', g_\alpha(y')) (1 + |\nabla g_\alpha(y')|^2)^{1/2} dy' \\ &=: \int_{\partial\Omega} f \nu_i d\mu_{n-1}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

4.3 Integralsätze von GAUSS, GREEN und OSTROGRADSKI

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet der Klasse C^1 . Aus Satz 4.4 ergeben sich unmittelbar die folgenden Aussagen.

Folgerung 4.5 (Integralsatz von OSTROGRADSKI (1826)) Für $f \in [C^1(\overline{\Omega})]^n$ gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f dx = \int_{\partial\Omega} \langle f, \nu \rangle d\mu_{n-1}.$$

Folgerung 4.6 (Partielle Integration) Für $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx = \int_{\partial\Omega} f g \nu_i d\mu_{n-1} - \int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx \quad (i = 1, \dots, n).$$

Folgerung 4.7 Für $f \in C^2(\overline{\Omega})$ und $g \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt

$$\int_{\Omega} (\Delta f) g dx = \int_{\partial\Omega} (\nabla f) \cdot \nu g d\mu_{n-1} - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dx$$

Um diese Aussage zu bestätigen, ersetzen wir f in Folgerung 4.6 durch $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Das ergibt

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} g dx = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \nu_i g d\mu_{n-1} - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx \quad (i = 1, \dots, n).$$

Summation über $i = 1, \dots, n$ liefert die behauptete Aussage.

Folgerung 4.8 (Integralsatz von GREEN (1828)) Für $f, g \in C^2(\bar{\Omega})$ gilt

$$\int_{\Omega} f \Delta g dx - \int_{\partial\Omega} f(\nabla g) \cdot \nu d\mu_{n-1} = \int_{\Omega} g \Delta f dx - \int_{\partial\Omega} g(\nabla f) \cdot \nu d\mu_{n-1}.$$

Dies erhält man aus Folgerung 4.7 durch Vertauschung der Rolle von f und g und anschließende Subtraktion der beiden Gleichungen. ■

Die Aussage von Folgerung 4.5 wird auch "Integralsatz von GAUSS" oder "GAUSS-OSTROGRADSKI" genannt. Die Bezeichnung "Divergenzsatz" ist ebenfalls gebräuchlich. Folgerung 4.8 findet sich in GREENS fundamentaler Arbeit [] (1828).

Wir bemerken, daß die Aussage von Folgerung 4.5 weder in GAUSS' Arbeit [] (1813) noch in seinen späteren Arbeiten explizit erscheint; in [] beweist GAUSS jedoch Spezialfälle dieses Integralsatzes (vgl. die nachfolgenden Betrachtungen). In der Selbstanzeige zu [] bemerkt er jedoch: "Der Verf. fängt damit an, sechs verschiedene allgemeine Lehrsätze zu begründen, vermitteltst deren dreifache, durch einen körperlichen Raum auszudehnende, Integrale auf zweifache, nur über die Oberfläche des Körpers auszudehnende, Integrale reducirt werden".

Ausführlichere Notizen zur Geschichte der Integralsätze finden sich in Abschn. ■

Als weitere Folgerungen aus Satz 4.4 bzw. aus dem Divergenzsatz beweisen wir einige der Aussagen aus GAUSS' Arbeit [] (1813). Diese beziehen sich auf Integrale, die über den Rand eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ erstreckt werden; sie wurden von GAUSS direkt (d. h. ohne Verwendungen einer allgemeinen Aussage wie Satz 4.4) erhalten.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet der Klasse C^1 . Für $x \in \partial\Omega$ bezeichnen wir mit $\alpha_i(x)$ den Winkel zwischen der positiven Richtung der x_i -Achse und der äußeren Einheitsnormale $\nu = \nu(x)$ bezüglich Ω ($i = 1, 2, 3$). Es folgt

$$\cos \alpha_i(x) = \langle e_i, \nu(x) \rangle = \nu_i(x).$$

Satz I ⁵⁾ Das über die ganze Oberfläche eines Körpers erstreckte Integral

$$\int_{\partial\Omega} \cos \alpha_i(x) ds$$

hat den Wert Null.

Setze $f \equiv 1$ in Satz 4.4. ■

Satz II Das Volumen eines Körpers wird durch das über die ganze Oberfläche erstreckte Integral

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\partial\Omega} x_i \cos \alpha_i(x) ds$$

⁵⁾ Formulierung gemäß Ostwald's Klassiker [].

ausgedrückt.

Setze $f(x) = \frac{x}{3}$ in Folgerung 4.5.

Die äußere Einheitsnormale an die Sphäre $S_R(0)$ ist gegeben durch

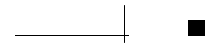
$$\nu = \nu(x) = \frac{x}{R}, \quad x \in S_R(0).$$

Es folgt $\left\langle \frac{x}{3}, \nu(x) \right\rangle = \frac{R^3}{3}$. Folgerung 4.5 mit $f(x) = \frac{x}{3}$ ergibt

$$\text{vol}(B_R) = \frac{R}{3} \cdot (\text{Flächeninhalt von } S_R(0)).$$

Für eine beliebige Dimension $n \geq 2$ erhält man analog

$$\text{vol}(B_R) = \frac{R}{n} \cdot (\text{Flächeninhalt von } S_R(0)).$$



Satz III Die der x_i -Achse parallele und zu dieser Achse entgegengesetzt gerichtete Anziehung eines Körpers auf einen Punkt x wird ausgedrückt durch das über die ganze Oberfläche erstreckte Integral

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x-y|} \cos \alpha_i(y) ds_y \quad (i = 1, 2, 3).$$

Für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ bezeichnet

$$U(x) := \int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} dy$$

das NEWTONsche Potential des Körpers Ω mit der Massendichte 1 im Aufpunkt x .

Es gilt $|y-x| \geq d_0 = \text{const} > 0$ für alle $y \in \bar{\Omega}$, und folglich

$$|x + \xi - y| \geq \frac{d_0}{2} \quad \forall |\xi| \leq \frac{d_0}{2}, \quad \forall y \in \bar{\Omega}.$$

Für $0 < |t| \leq \frac{d_0}{2}$ erhalten wir

$$\frac{1}{t} \left(\frac{1}{|x + te_i - y|} - \frac{1}{|x - y|} \right) = -\frac{x_i + \theta t - y_i}{|x + \theta te_i - y|^3}, \quad \theta \in]0, 1[$$

($i = 1, 2, 3$). Daher können zur Berechnung von $\frac{\partial U}{\partial x_i}(x)$ Grenzübergang $t \rightarrow 0$ und Integration über Ω vertauscht werden. Mit Hilfe von Satz 4.4 ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_i}(x) &= -\int_{\Omega} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^3} dy = -\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|x - y|} dy \\ &= -\int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x - y|} \cos \alpha_i(y) ds_y. \end{aligned}$$



Wir bezeichnen mit $\varphi_{x,y}$ den Winkel zwischen den beiden Einheitsvektoren $\frac{y-x}{|y-x|}$ und $\nu(y)$ ($x \in \mathbb{R}^3$, $y \in \partial\Omega$, $x \neq y$). Dann gilt

$$\cos \varphi_{x,y} = \left\langle \frac{y-x}{|y-x|}, \nu(y) \right\rangle.$$

Satz IV Das über die gesamte Oberfläche eines Körpers erstreckte Integral

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\cos \varphi_{x,y}}{|x-y|^2} ds_y$$

ist entweder $= 0$ oder $= -2\pi$ oder $= -4\pi$, je nachdem ob x außerhalb des Körpers liegt oder auf seiner Oberfläche oder innerhalb des Körpers.

$x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ Es gilt

$$\operatorname{div}_y \left(\nabla_y \frac{1}{|x-y|} \right) = 0 \quad \forall y \in \overline{\Omega}.$$

Der Divergenzsatz liefert

$$0 = - \int_{\partial\Omega} \left\langle \nabla_y \frac{1}{|x-y|}, \nu(y) \right\rangle ds_y = \int_{\partial\Omega} \frac{\cos \varphi_{x,y}}{|x-y|^2} ds_y.$$

$x \in \partial\Omega$ GAUSS bemerkt: "Der Fall, daß x auf der Oberfläche des Körpers liegt, bedarf einer besonderen Betrachtung" ⁶⁾. Diese Betrachtungen hat GAUSS mit wenigen Zeilen durchgeführt. Etwas ausführlicher müßten die "besonderen Betrachtungen" wie folgt durchgeführt werden.

Der Integrand von

$$I(x) := \int_{\partial\Omega} \frac{\cos \varphi_{x,y}}{|x-x|} ds_y$$

ist singulär für $y = x$. Daher betrachten wir Gebiete Ω der Klasse $C^{1,\alpha}$ (d. h. die partiellen Ableitungen der Funktion g in Definition 4.1 sind Hölder-stetig mit dem Exponenten $\alpha \in]0, 1[$). Unter dieser Voraussetzung wird gezeigt:

- $I(x)$ ist ein Integral mit schwacher Singularität;
- $I(\cdot)$ ist stetig auf $\partial\Omega$;
- $I(x) = -2\pi$ für alle $x \in \partial\Omega$.

Der detaillierte Beweis dieser Aussagen übersteigt jedoch den Rahmen der vorliegenden Darstellung.

$x \in \overline{\Omega}$ Sei $r > 0$ so gewählt, daß $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$ gilt. Folgerung 4.5 ergibt

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left\langle \nabla_y \frac{1}{|x-y|}, \nu(y) \right\rangle ds_y + \int_{S_r(x)} \left\langle \nabla_y \frac{1}{|x-y|}, \nu(y) \right\rangle ds_y.$$

Hier bedeutet $\nu(y)$ ($y \in \partial\Omega \cup S_r(x)$) die äußere Einheitsnormale bezüglich $\Omega \setminus \overline{B_r(x)}$. Auf $S_r(x)$ gilt

$$\nu(y) = -\frac{y-x}{r}, \quad y \in S_r(x).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} - \int_{\partial\Omega} \left\langle \nabla_y \frac{1}{|x-y|}, \nu(y) \right\rangle ds_y &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 \int_{S_r(x)} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^3} \cdot (y_i - x_i) ds_y \\ &= \frac{1}{r^2} \int_{S_r(x)} ds_y \\ &= 4\pi. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

4.4 Integralsatz von STOKES

⁶⁾Vgl. [; S.9] (bzw. [; S. 58]).

Literatur

- [1] BRÖCKER, TH.: *Analysis III*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim 1992.
- [2] BROWDER, A.: *Mathematical analysis*. An introduction. Springer-Verlag, New York 1996.
- [3] FORSTER, O.: *Analysis 3*. 3. Aufl., Vieweg, Braunschweig 1984.
- [4] HILDEBRANDT, S.: *Analysis 2*. Springer-Verlag, Berlin 2003.
- [5] JÄNICH, K.: *Vektoranalysis*. Springer-Verlag, Berlin 1992.
- [6] MUNKRES, J.R.: *Analysis on manifolds*. Addison-Wesley Publ. Comp., Reading, Mass. 1991.
- [7] SPIVAK, M.: *Calculus on manifolds*. 24th printing; Addison-Wesley Publ. Comp., Reading, Mass. 1995.

Als Einführung in die Differentialgeometrie können folgende Bücher dienen:

- [8] BÄR, CHR.: *Elementare Differentialgeometrie*. - De Gruyter, Berlin 2001.
- [9] DO CARMO, M.: *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. - 3. Aufl.; Vieweg, Braunschweig 1993.

Zahlreiche Beispiele und Übungsaufgaben mit Lösungen zur Integralrechnung in \mathbb{R}^n , zur Integration auf Flächen und zur Vektoranalysis finden sich in:

- [10] FICHTENHOLZ, G. M.: *Differential- und Integralrechnung*. Bd. III. - Dt. Verlag Wiss., Berlin 1964.
- [11] MARSDEN, J. E.; TROMBA, A. J.: *Vektoranalysis*. - Spectrum Akad. Verlag., Heidelberg 1995.