Prof. Dr. Uwe Küchler
Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung
Sommersemester 2006

Fakultäten, Binomialkoeffizienten, binomische Reihe

Es seien $N_0 := \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, $N_1 = N_0 \backslash \{0\}$.
Als *Fakultät von* n ($n \in N_1$) bezeichnet man die Zahl $n! := n(n-1) \ldots \cdot 2 \cdot 1$.
Man setzt außerdem $0! := 1$.

Es gilt

$$n! = n(n-1)!, \quad n \geq 0,$$

und

$$n^n \mathrm{e}^{-\mathrm{n}} \sqrt{2\pi \mathrm{n}} \exp[\tfrac{1}{12\mathrm{n}+1}] < \mathrm{n}! < \mathrm{n}^{\mathrm{n}} \mathrm{e}^{-\mathrm{n}} \sqrt{2\pi \mathrm{n}} \exp[\tfrac{1}{12\mathrm{n}}], \quad \mathrm{n} \geq 1 \tag{1}$$

(vgl. Fichtenholz: Integralrechnung II, Deut. Verlag der Wissenschaften, Berlin 1964, Abschnitt XI, Nr. 406).

Folgerung *(Stirlingsche Formel)*:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n \mathrm{e}^{-\mathrm{n}} \sqrt{2\pi \mathrm{n}}} \, \mathrm{e}^{\frac{1}{12\mathrm{n}}} = 1.$$

Es sei $k, n \in N_0$ mit $k \geq n$. Die Zahl

$$(n)_k := \frac{n!}{(n-k)!}$$

nennt man mitunter *"Untere Faktorielle von n zur Ordnung k"* (Henze, N.; Stochastik für Einsteiger, Vieweg Verlag (2003)).

Es gilt $(n)_0 = 1$ und $(n)_n = n!$ für $n \in N_0$ und

$(n)_k = n(n-1)\dots(n-k+1)$ für $k, n \in N_1$ mit $k \leq n$.

Für alle $k, n \in N_0$ mit $k \leq n$ definiert man *Binomialkoeffizienten* "n über k" durch

$\binom{n}{k} := \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Es gilt

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad n \in N_0,$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad k, n \in N_0, \quad k \leq n,$

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \quad k, n \in N_0, \quad k+1 \leq n.$ ("Pascalsche Dreieck")

Die Binomialkoeffizienten treten in der *binomischen Formel* auf:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad a, b \in R_1, n \in N_0. \tag{2}$$

Für jede reelle Zahl x definiert man analog zu $(n)_k$ durch

$(x)_k := x(x-1)\dots(x-k+1), \quad k \in N_1$ und $(x)_0 := 1$

die *untere Faktorielle von x zur Ordnung k.*

Offenbar gilt

$(-1)_k = (-1)^k \cdot k!, \quad k \in N_0,$

$(-n)_k = (-1)^k (n+k-1)_k, \quad k, n \in N_1$

$$(n)_k = 0, \quad k, n \in N_0, \quad k > n. \tag{3}$$

Mit Hilfe dieses Begriffs führt man *Binomialkoeffizienten in allgemeiner Form* ein:

$\binom{x}{k} := \frac{(x)_k}{k!} \quad , \quad x \in R_1, k \in N_0.$

Diese Binomialkoeffizienten treten in folgender *binomischen Reihe* auf:

$$(1+t)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} t^k, \quad |t| < 1. \tag{4}$$

Zum Beweis: Für jedes $x \in R_1$ ist die Funktion

$f(t) := (1+t)^x \quad , \quad t \in (-1,1) =: I$

in I beliebig oft differenzierbar, und es gilt

$f'(t) = x(1+t)^{x-1}$

$f^{(k)}(t) = (x)_k(1+t)^{x-k} \quad , \quad k \geq 1.$

Die Entwicklung von f in eine Taylorreihe in $t = 0$ liefert

$$f(t) = (1+t)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)_k}{k!} t^k,$$

woraus sich (4) ergibt.

Der Konvergenzradius der Potenzreihe in (4) ist Eins (Quotientenkriterium).

Aus (4) folgt für $t = \frac{a}{b}$

$$(a+b)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} a^k b^{x-k}, \quad x, a, b \in R_1 \text{ mit } |\frac{a}{b}| < 1,$$

und für $x = n \in N_1$ wegen (3) die *binomische Formel* (2):

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, a, b \in R_1, n \in N_1.$$

Insbesondere ergibt sich für $a = b = 1, n \in N_1$

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n,$

und für $a = -b = 1, n \in N_1$

$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$

Man prüft leicht nach, dass für alle $x \in R_1$ gilt

$\binom{x}{k} + \binom{x}{k+1} = \binom{x+1}{k+1} \quad , \quad k \in N_0,$

und für alle $x > 0$ die Gleichungen

$\binom{-x}{k} = (-1)^k \binom{x+k-1}{k} \quad , \quad k \in N_0,$

$\binom{x}{k} - \binom{x}{k-1} + - \ldots (-1)^{k-1} \binom{x}{1} + (-1)^k \binom{x}{0} = \binom{x-1}{k}, \quad k \in N_0$

erfüllt sind.

Weitere Eigenschaften von Binomialkoeffizienten findet man z. B. in Feller I, Kap. II, 10-12.