Die Cantorschen Mengen G_0 und P_0

Wir teilen das Intervall $I = [0,1]$ durch die Punkte $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ in drei Teile und entfernen das Intervall $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.
Die verbleibenden Intervalle $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$ teilen wir wieder in jeweils drei Teile und entfernen die offenen Intervalle $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ bzw. $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Mit den vier verbleibenden Intervallen $[0, \frac{1}{9}], [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}], [\frac{8}{9}, 1]$ verfahren wir analog, usw.

Aus $[0,1]$ wird also die offene Menge

$$G_0 = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) \cup \Big((\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}) \cup (\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}) \Big) \cup \ldots$$

entfernt. Die Differenzmenge $P_0 := [0,1] \backslash G_0$ ist abgeschlossen, G_0 und P_0 heißen die Cantorschen Mengen.

Die Cantorsche Menge P_0 wird auf Grund ihrer Eigenschaften häufig als exotisches Beispiel in der Analysis herangezogen. Es gilt nämlich die folgende

Aussage: *Die Menge P_0 ist abgeschlossen, nirgends dicht*, dicht in sich**, überabzählbar und hat das Lebesguemaß Null.*

Die Menge P_0 hat eine einfache Darstellung. Sie besteht aus all denjenigen x, die eine triadische Darstellung $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{i_k}{3^k} (i_k \in \{0,1,2\})$ besitzen, bei der keine der Ziffern i_k gleich Eins ist.

Die Cantorsche Funktion

Wir definieren

$C(x) = \frac{1}{2},\ x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

$C(x) = \frac{1}{4},\ x \in [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}], C(x) = \frac{3}{4}, x \in [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$

$C(x) = \frac{1}{8},\ x \in [\frac{1}{27}, \frac{2}{27}, \cdots,\ C(x) = \frac{7}{8}, x \in [\frac{25}{27}], \frac{26}{27}]$

$C(x) = \frac{1}{16},\ x \in [\frac{1}{81}, \frac{2}{81}]$

$\vdots$

---

*d.h., sie enthält keine offene Menge
**Jedes Element von P_0 ist Häufungspunkt von P_0

Aussage: *Die Funktion $C(\cdot)$ ist auf $[0, 1]$ definiert, dort stetig und monoton nicht fallend. Sie ist in jedem Punkt $x \in G_0$ differenzierbar und hat dort die Ableitung $C'(x) = 0, x \in G_0$.*

Definiert man als Wachstumspunkte einer nichtfallenden Funktion F diejenigen Punkte x, für die

$F(x - \varepsilon) < F(x + \varepsilon) \ \forall \varepsilon > 0$

gilt, so hat C die Menge P_0 als Menge der Wachstumspunkte.

Folglich haben wir

$\lambda[\{x \in [0, 1] : C'(x) \text{ existiert und ist gleich } 0\}] = 1.$

Literatur:

Elstrodt, J.: Maß- und Integrationstheorie, Springer, 1999, Kapitel II, §8.

Natanson, I.P.: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, Akademie Verlag Berlin, 2. Auflage, 1961.