

# Kapitel 2

## Zufällige Versuche und zufällige Ereignisse

In diesem Kapitel führen wir zunächst anschaulich die grundlegenden Begriffe des zufälligen Versuchs und des zufälligen Ereignisses ein und stellen danach eine Verbindung zur Mengenlehre her. Damit wird die Grundlage einer mathematischen Theorie des Zufalls, der Wahrscheinlichkeitstheorie gelegt. Wir erfahren, dass die mit einem zufälligen Versuch verbundenen zufälligen Ereignisse eine  $\sigma$ -Algebra bilden.

### 2.1 Zufällige Versuche

**Definition 2.1** *Unter einem zufälligen Versuch versteht man einen Versuch (im weitesten Sinne des Wortes), dessen Ausgang unter bestimmten wesentlichen und fixierten Bedingungen im Rahmen bestimmter Möglichkeiten ungewiss ist.*

Die einzelnen möglichen Versuchsausgänge (-ergebnisse) werden häufig mit  $\omega$ , die Menge aller möglichen Versuchsausgänge des betrachteten zufälligen Versuches mit  $\Omega$  bezeichnet.

#### Beispiel 2.2

- a) Werfen einer Münze: Die möglichen Versuchsausgänge  $\omega$  sind gleich  $Z$  und  $W$ , d. h. Zahl oder Wappen. Folglich ist  $\Omega = \{Z, W\}$ .

- b) Werfen zweier unterschiedlicher Münzen:  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$   
 $\omega_i =$  Wurfresultat der  $i$ -ten Münze,  
 $\omega_i \in \{Z, W\}, \quad i = 1, 2$   
 $\Omega = \{(Z, Z), (Z, W), (W, Z), (W, W)\}$
- c)  $n$ -maliges Werfen einer Münze,  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n), \omega_i \in \{Z, W\}, i = 1, 2, \dots, n$
- d) Werfen eines Würfels:  
 $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$
- e) Werfen zweier unterscheidbarer Würfel:  $\omega = (i, j), \quad i$  Augenzahl des ersten,  $j$  Augenzahl des zweiten Würfels,  
 $\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$
- f) Sonntagsziehung im Lotto "6 aus 49" (ohne Zusatzzahl):  
 $\Omega = \{\omega = \{i_1, \dots, i_6\} : i_1, \dots, i_6 \in \{1, \dots, 49\}, \quad i_j \neq i_k (j \neq k)\}$
- g) Geburt eines Kindes, es werden registriert Gewicht  $\eta$  in  $g$ , Größe  $\xi$  in  $cm$ , Geschlecht  $\tau$ :  
 $\omega = (\eta, \xi, \tau), \quad \Omega = (0, \infty) \times (0, \infty) \times \{m, w\}$
- h) Niederschlagsmenge  $\omega$  pro Quadratmeter in  $mm$  am 30. 10. 2007 auf dem Alexanderplatz:  $\Omega = [0, \infty)$
- i) Schadenhöhe  $\omega$  bei einem PKW-Unfall, die der Versicherer in Euro zu zahlen hat:  
 $\Omega = [0, \infty)$
- j) Anzahl  $\omega$  aller polizeilich gemeldeten Kfz-Unfälle an einem bestimmten Tag auf der Rudower Chaussee in Adlershof:  $\Omega = \{0, 1, \dots, n, \dots\}$

Diskussion:

1.  $\Omega$  ist nicht eindeutig festgelegt. Einzige Bedingung: nach Ausführung des Versuches muss genau ein  $\omega$  aus  $\Omega$  als Versuchsergebnis feststehen. Insbesondere ist es nicht notwendig, dass alle  $\omega \in \Omega$  auch tatsächlich auftreten können,  $\Omega$  kann also größer gewählt werden als unbedingt notwendig (vgl. Beispiele g) - j)).  
 Erweiterungen von  $\Omega$  sind aus mathematischen Gründen oder wegen

Übersichtlichkeit häufig vorteilhaft.

2. Vor dem Versuch ist der tatsächlich auftretende Ausgang  $\omega \in \Omega$  des zufälligen Versuches ungewiss. Sicher ist nur, dass genau eines der  $\omega$  aus  $\Omega$  auftreten wird. Nach dem Versuch liegt der aufgetretene Ausgang  $\omega$  fest. Die Ungewissheit ist verschwunden. Der Versuch wurde *realisiert, verwirklicht*. Das nach dem Versuch erschienene  $\omega$ , eine Zahl in a), d), h), i), j) oder allgemeinere Ergebnisse in den anderen Beispielen, heißt *Realisierung dieses Versuches*. Bei erneuter Ausführung des Versuches tritt i.A. ein anderer Ausgang in Erscheinung, es erscheint eine andere Realisierung.

Wird der Versuch mehrmals durchgeführt, ergibt sich eine Folge von Realisierungen, eine sogenannte  $(\omega, \eta, \dots, \kappa)$  *Stichprobe*, ein *Datensatz*.

## 2.2 Zufällige Ereignisse

**Definition 2.3** *Ein zufälliges Ereignis (oder kurz Ereignis) ist ein Ereignis, das (im Rahmen eines bestimmten zufälligen Versuches und in Abhängigkeit vom Versuchsausgang) eintreten kann, aber nicht eintreten muss.*

Zufällige Ereignisse beschreibt man häufig verbal durch eine logische Aussage und symbolisch durch große Buchstaben  $A, B, C, \dots$ , meist vom Anfang des Alphabetes.

Betrachten wir einige Ereignisse im Zusammenhang mit Beispielen aus Abschnitt 2.1.

### Beispiel 2.4 (Fortsetzung von 1.2)

- a)  $A :=$  "Es erscheint das Wappen"
- e)  $A :=$  "Die Summe der Augenzahlen ist gerade"
- f)  $A :=$  "Bei der Ziehung erscheint mindestens ein Zahlenzwilling"  
 $B :=$  "Der abgegebene Tippschein enthält 3 Richtige"

h)  $A :=$  "Es regnet mehr als 10 mm"

i)  $A :=$  "Der Schaden ist größer als 100 000 EUR"

**Definition 2.5** *Man sagt, das Ereignis  $A$  tritt (bei Versuchsdurchführung mit dem Versuchsausgang  $\omega$ ) ein, wenn die zugehörige logische Aussage bei diesem  $\omega$  wahr ist, es tritt nicht ein, wenn sie bei diesem  $\omega$  falsch ist. Wenn ein Ereignis  $A$  beim Versuchsausgang  $\omega$  eintritt, so sagt man auch, dieses  $\omega$  führt zum Eintreten von  $A$ .*

**Definition 2.6** *Das Ereignis  $A$  zieht das Ereignis  $B$  nach sich oder ist ein Teil von  $B$ , falls aus dem Eintreten von  $A$  folgt, dass auch  $B$  eintritt. Symbolisch:  $A \subseteq B$ .*

Im Beispiel e) aus 1.2 gilt mit

$C :=$  "Die Summe der Augenzahlen ist fünf" und

$D :=$  "Es erscheint eines der Paare (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)" die Beziehung  $C \subseteq D$ .

**Definition 2.7** *Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  heißen einander gleich (symbolisch:  $A = B$ ), wenn das Eintreten des einen Ereignisses das Eintreten des anderen nach sich zieht, d. h. falls  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A$  gelten. Einander gleiche Ereignisse treten entweder beide ein oder beide nicht ein.*

Im Beispiel d) aus 1.2 gilt mit

$C :=$  "Es erscheint eine ungerade Zahl"

$D :=$  "Die gewürfelte Augenzahl ist nicht 2, 4 oder 6"  
die Beziehung  $C = D$ .

**Definition 2.8** *Ein zufälliges Ereignis  $A$  heißt mit einem gegebenen zufälligen Versuch verbunden, falls man für jeden möglichen Versuchsausgang  $\omega \in \Omega$  entscheiden kann, ob er zum Eintreten von  $A$  führt oder nicht.*

Das Ereignis  $A$  ist also mit dem zufälligen Versuch  $\Omega$  genau dann verbunden, wenn man nach Ausführung des Versuches entscheiden kann, ob  $A$  eingetreten ist oder nicht.

Das Ereignis  $B :=$  "Der abgegebene Tippschein enthält drei Richtige" ist mit dem zufälligen Versuch einer Sonntagsziehung im Zahlenlotto verbunden. Das Ereignis "Morgen scheint die Sonne mindestens zwei Stunden" ist nicht mit dem zufälligen Versuch des Werfens eines Würfels verbunden.

**Definition 2.9** *Im Rahmen eines zufälligen Versuches heißt ein Ereignis  $S$  ein sicheres Ereignis, falls es bei jedem Versuchsausgang eintritt. Ein Ereignis  $U$  nennt man ein unmögliches Ereignis, wenn es bei keinem Versuchsausgang eintritt.*

Offenbar gelten für jedes mit dem Versuch verbundene Ereignis  $A$  die Relationen  $U \subseteq A \subseteq S$ .

Im Beispiel d) aus 1.2 ist das Ereignis "Es erscheint eine der Zahlen "1, 2, ..., 6" ein sicheres Ereignis, und das Ereignis "Es erscheint eine Zahl, die größer als 10 ist" ein unmögliches Ereignis.

Wir erinnern daran, dass wir mit jedem zufälligen Versuch eine Menge  $\Omega$  festlegen, die alle möglichen Ausgänge des Versuches enthält.

Die Menge aller Ereignisse  $A$ , die mit einem gegebenen zufälligen Versuch verbunden sind, wird mit  $\mathfrak{A}$  bezeichnet.

Das Paar  $(\Omega, \mathfrak{A})$  ist für uns das vorläufige Modell eines zufälligen Versuches.

## 2.3 Verknüpfung von Ereignissen

Es sei  $(\Omega, \mathfrak{A})$  ein zufälliger Versuch, d. h.  $\Omega$  enthalte die Menge aller möglichen Versuchsausgänge  $\omega$  und  $\mathfrak{A}$  sei das System der mit dem Versuch verbundenen Ereignisse. Dabei seien  $S$  das sichere und  $U$  das unmögliche Ereignis.

Aus gegebenen Ereignissen  $A, B \in \mathfrak{A}$  lassen sich weitere Ereignisse bilden, die ebenfalls mit dem zufälligen Versuch verbunden sind:

**Definition 2.10** Das Ereignis  $A \cup B$  tritt ein, falls  $A$  eintritt oder  $B$  eintritt (oder beide).  $A \cup B$  nennt man die Vereinigung von  $A$  und  $B$ . Es gilt  $A \cup S = S, A \cup U = A$ .

Das Ereignis  $A \cap B$  tritt ein, falls  $A$  und  $B$  beide eintreten.  $A \cap B$  nennt man den *Durchschnitt von  $A$  und  $B$* . Es gilt  $A \cap S = A, A \cap U = U$ .

$\bar{A}$  tritt genau dann ein, falls  $A$  nicht eintritt.  
 $\bar{A}$  heißt das zu  $A$  *komplementäre Ereignis*. Es gilt  $\overline{\bar{U}} = S$  und  $\overline{\bar{S}} = U$ .

$A \setminus B$  tritt genau dann ein, wenn  $A$  eintritt und  $B$  nicht eintritt.  
 $A \setminus B$  heißt die *Differenz von  $A$  und  $B$* . Es gilt  $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ .

Das Ereignis  $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  heißt *symmetrische Differenz* von  $A$  und  $B$ . Es tritt genau dann ein, wenn entweder  $A$  oder  $B$  eintritt.

Wenn  $A \cap B = U$  gilt, so heißen  $A$  und  $B$  *disjunkt* oder *unvereinbar*.  
 Es gilt stets:  $A \cap \bar{A} = U, A \cup \bar{A} = S$ .

Sind  $A_k, k = 1, \dots, m$ , Ereignisse aus  $\mathfrak{A}$ , so bezeichne  $\bigcup_{k=1}^m A_k$  das Ereignis, das genau dann eintritt, wenn mindestens eines der Ereignisse  $A_k$  eintritt, und  $\bigcap_{k=1}^m A_k$  das Ereignis, das genau dann eintritt, wenn alle  $A_k$  eintreten.

Analog definiert man zu jeder Folge  $A_k, k \geq 1$ , aus  $\mathfrak{A}$  die Ereignisse  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  und  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ .

Folgerung: Die Menge  $\mathfrak{A}$  aller mit einem zufälligen Versuch verbundenen Ereignisse hat also die Eigenschaften:

- 1)  $U, S \in \mathfrak{A}$ ,

- 2) Für jedes  $A \in \mathfrak{A}$  ist auch  $\bar{A} \in \mathfrak{A}$ ,
- 3) Für jedes  $n \geq 2$  und alle  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$  gilt  $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathfrak{A}$ .

Auf Grund dieser Eigenschaften und der Definition bzw. der Eigenschaften von  $U$  und  $S$  heißt  $\mathfrak{A}$  eine *Algebra* (bez. der Operationen  $\bigcup, ^-$ ) mit Nullelement  $U$  und Einselement  $S$ .

Da außerdem

- 4) Für alle  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathfrak{A}$  gilt  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A}$

erfüllt ist, nennt man  $\mathfrak{A}$  auch eine  $\sigma$ -*Algebra*.

Literatur: Bauer (1991), Krengel (2002)

## 2.4 Ereignisse und Mengen

Es sei  $(\Omega, \mathfrak{A})$  ein zufälliger Versuch im Sinne der Schlußbemerkungen von Abschnitt 1.2.

Jedes mit diesem Versuch verbundene Ereignis  $A$ , d.h. jedes  $A$  aus  $\mathfrak{A}$ , wird durch eine Teilmenge  $A'$  von  $\Omega$  charakterisiert:

$$A \longleftrightarrow A' = \{\omega \in \Omega : \text{erscheint der Versuchsausgang } \omega, \text{ so tritt } A \text{ ein} \}$$

Wenn  $A$  eintritt, so ist ein Versuchsausgang  $\omega$  eingetreten, der zu  $A'$  gehört. Wenn ein  $\omega \in A'$  als Versuchsausgang auftritt, so tritt nach Definition von  $A'$  auch  $A$  ein.

$A$  und "Es erscheint ein  $\omega \in A'$  als Versuchsergebnis" sind somit im Sinne von Definition 2.7 einander gleiche Ereignisse, d. h. entweder treten sie beide ein oder beide nicht.

Insofern charakterisiert die Teilmenge  $A'$  von  $\Omega$  das Ereignis  $A$ . Identifiziert man  $A$  mit seiner zugehörigen Menge  $A'$ , so können wir feststellen:

Feststellung:

*Zufällige Ereignisse, die mit einem zufälligen Versuch  $(\Omega, \mathfrak{A})$  verbunden sind,*

kann man identifizieren mit Teilmengen von  $\Omega$ , m. a. W., die  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$  ist ein System von Teilmengen von  $\Omega$ . Bei dieser Entsprechung wird das sichere Ereignis mit  $\Omega$ , das unmögliche Ereignis mit der leeren Menge  $\emptyset$  identifiziert. Die Korrespondenz  $A \longleftrightarrow A'$  ist bezüglich der Operationen Vereinigungs-, Durchschnitts-, Differenz- und Komplementbildung für Ereignisse bzw. für Mengen ein Isomorphismus.

Das Paar  $(\Omega, \mathfrak{A})$  dient nun vorläufig als mathematisches Modell eines zufälligen Versuches, dessen mögliche Versuchsausgänge zu  $\Omega$  gehören, wobei die mit dem Versuch zusammenhängenden Ereignisse, also die Menge  $\mathfrak{A}$ , eine  $\sigma$ -Algebra von Teilmengen von  $\Omega$  ist.

In den Beispielen a) bis f) und j) ist  $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$  (Potenzmenge von  $\Omega$ ) in den Beispielen g) bis i) wählt man i. a.  $\mathfrak{A} \subsetneq \mathfrak{P}(\Omega)$ , die Begründung werden wir kennen lernen.

## 2.5 Beispiel: Münzenwurf

Wir formulieren zum Ende dieses Abschnittes noch ein mathematisches Modell, auf das wir später mehrfach zurückkommen werden. Eine Münze werde  $n$ -mal geworfen. Die möglichen Ausgänge  $\omega$  dieser Wurfserie sind die  $n$ -Tupel  $\omega = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  mit  $x_k \in \{-1, 1\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , wobei  $x_k = +1 (= -1)$  gesetzt wird, falls beim  $k$ -ten Wurf die Zahl (bzw. das Wappen) oben liegt. Die Menge  $\Omega$  aller möglichen Ausgänge  $\omega$  der Wurfserie besteht aus  $2^n$  Elementen.

Wir setzen  $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ , denn für jede Teilmenge  $A'$  von  $\Omega$  ist  $A :=$  "Der zufällige Versuch endet mit einem  $\omega \in A'$ " ein im Sinne von Definition 2.8 mit dem  $n$ -maligen Werfen der Münze verbundenes Ereignis.



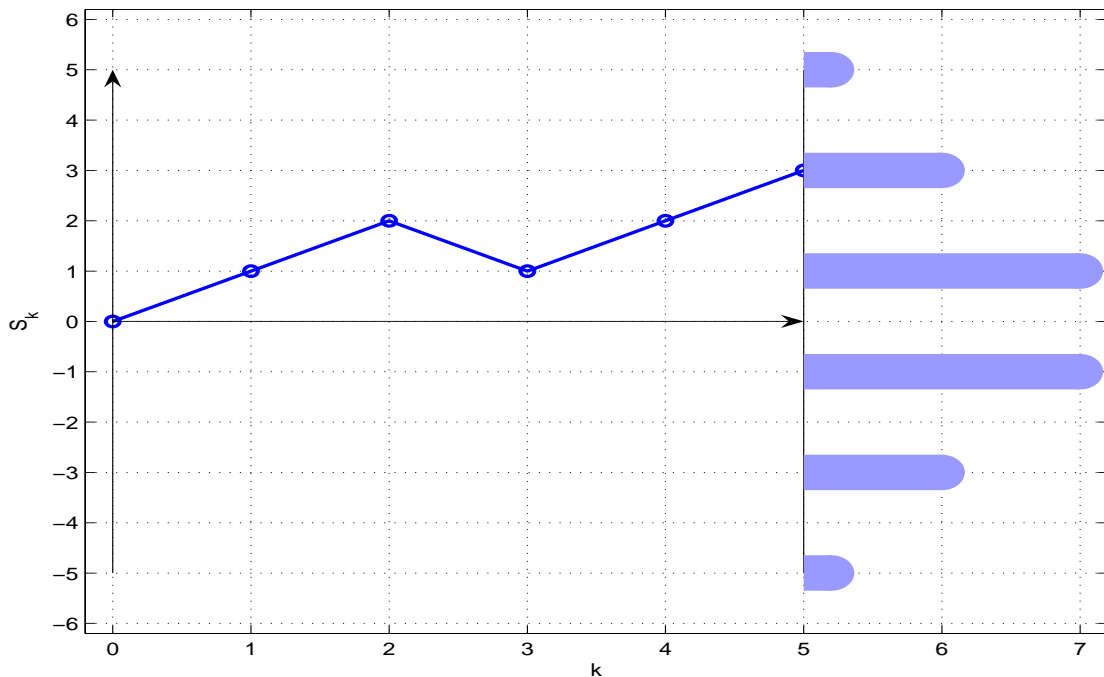


Abbildung 2.1: Ein Pfad der Länge fünf

Für jedes  $\omega = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$  definieren wir

$$s_0 = 0, s_k = \sum_{l=1}^k x_l, k = 1, 2, \dots, n$$

und nennen die Folge

$$s = ((k, s_k), k = 0, 1, \dots, n)$$

den zu  $\omega$  gehörenden *Pfad*. Wir veranschaulichen jeden Pfad  $s$  durch die Punkte  $(k, s_k)$  in der Ebene und verbinden die benachbarten Punkte  $(k, s_k)$  und  $(k+1, s_{k+1})$  linear. Diese Pfade  $s$  haben die Eigenschaft

$$s_0 = 0 \text{ und } |s_k - s_{k-1}| = 1, k = 1, 2, \dots, n$$

und entsprechen den Versuchsausgängen  $\omega$  eindeutig.

Vereinbart man ein Spiel, in dem der Spieler A von einer Bank den Betrag +1 erhält, falls im Ergebnis eines Münzwurfes die Zahl erscheint, und er den

Betrag 1 zu zahlen hat, wenn Wappen oben liegt, so ist sein Gewinn nach  $k$  Würfeln gleich  $s_k$ .

Das Ereignis

$C$ : = "Spieler A hat zum Schluss einen positiven Betrag gewonnen"

tritt genau dann ein, wenn der Versuchsausgang  $\omega = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  zur Menge

$$C = \{\omega \in \Omega \mid s_n = \sum_{l=1}^n x_l > 0\}$$

gehört. Zu  $C$  gehören also alle  $s(\omega)$  mit Pfaden, die nach  $n$  Schritten im Positiven enden.

Das Ereignis

$D$ : = "Das Guthaben des Spielers A sinkt im Verlauf des Spieles niemals unter Null"

tritt genau dann ein, wenn ein Versuchsausgang  $\omega \in \Omega$  mit

$$\min_{k=1,2,\dots,n} s_k \geq 0$$

auftritt, d. h., wenn der zugehörige Pfad niemals die  $-1$  berührt.

Zur Vorbereitung allgemeinerer Definitionen führen wir folgende Funktionen  $X_k$  und  $S_m$  auf  $\Omega$  ein:

$$X_k(\omega) := x_k, k = 1, 2, \dots, n,$$

$$S_m(\omega) := \sum_{k=1}^m X_k(\omega) = \sum_{k=1}^m x_k, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Die "Zufallsgröße"  $X_k$  gibt das Ergebnis des  $k$ -ten Wurfes an, die "Zufallsgröße"  $S_m(\omega)$  ist der Gewinn des Spielers A nach  $m$  Würfeln,  $m = 1, 2, \dots, n$ .

Für die oben eingeführten Ereignisse  $C$  und  $D$ , gilt dann

$C = \{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) > 0\}$ , kurz geschrieben  $C = \{S_n > 0\}$ , und

$D = \{\omega \in \Omega \mid \min_{k=1, \dots, n} S_k(\omega) \geq 0\}$  oder kurz  $D = \{\min_{k=1, \dots, n} S_k \geq 0\}$ .

Kontrollfragen:

Man gebe im Modell des  $n$ -maligen Münzenwurfes die zum Ereignis  $B :=$  "Der Spieler gewinnt nach  $n$  Würfeln mindestens einen Betrag der Höhe  $+1$ " gehörende Teilmenge von  $\Omega$  an.

Welche Zufallsgröße  $Z$ , d. h. welche Funktionen  $Z$  auf  $\Omega$  gibt an, bei welchem Wurf der Spieler A zum ersten Mal eine Zahl wirft?