Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

Sommersemester 2007

Stochastik I

Lösungsansätze zur 1. Zusatzübung

1. a) Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und es sei (A_n) eine Folge von Ereignissen aus $\mathfrak{A}$. Beweisen Sie, dass aus $A := \liminf A_n = \limsup A_n$ die Beziehung $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$ folgt.

   b) Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathbb{1}_{\limsup A_n} = \limsup \mathbb{1}_{A_n}$$

$$\mathbb{1}_{\liminf A_n} = \liminf \mathbb{1}_{A_n}$$

   c) Bestimmen Sie $\liminf_{n\to\infty} A_n$ und $\limsup_{n\to\infty} A_n$ für

$$A_n = \begin{cases} A & \text{für } n = 2k (k \in \mathbb{N}) \\ B & \text{für } n = 2k+1 (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Lösung: a) Es ist $\underbrace{\bigcap_{m\geq n} A_m}_{:=B_n} \subseteq A_n \subseteq \underbrace{\bigcup_{m\geq n} A_m}_{=:C_n}$, wobei B_n monoton wächst und C_n monoton fällt. Wir wenden die Monotonie von P und die Folgerung 3.8 aus der σ-Stetigkeit von P an um zu schließen

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n}_{=\liminf A_n}) \leq \lim_{n\to\infty} P(A_n) \leq P(\underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n}_{=\limsup A_n}) = \lim_{n\to\infty} P(C_n)$$

Mit der Voraussetzung folgt nun $P(A) \leq \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) \leq P(A)$ und damit die Behauptung.

b) $\mathbb{1}_{\limsup A_n}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in \limsup A_n \\ o & \text{sonst} \end{cases}$

$\omega \in \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m\geq n} A_m$ gdw. $\forall n \exists m \geq n : \mathbb{1}_{A_m}(\omega) = 1$ gdw. $\limsup \mathbb{1}_{A_n} = 1$.
Die Gleichung für $\liminf \mathbb{1}_{A_n}$ folgt analog.

c) Für alle $n \geq 2$ ist $\bigcap_{m\geq n} A_m = A \cap B$, damit folgt $\liminf_{n\to\infty} A_n = A \cap B$.
Für alle $n \geq 2$ ist $\bigcup_{m\geq n} A_m = A \cup B$, damit folgt $\limsup_{n\to\infty} A_n = A \cup B$.

2. Peter und Paul werfen je einen regulären Würfel. Peter gewinnt, falls seine Augenzahl echt größer als die von Paul ist.
Angenommen, beide spielen das Spiel fünf mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

dass Peter mindestens viermal gewinnt?
Lösung: Ein Spiel hat die 36 gleichwahrscheinlichen möglichen Ausgänge $\Omega = \{(i,j) : i,j = 1,\ldots,6\}$. In 15 von diesen 36 Spielausgängen gewinnt Peter. Die Wahrscheinlichkeit, dass Peter in einem Spiel gewinnt beträgt 15/36. Das Ereignis 'Peter gewinnt in mindestens 4 Spielen' ist die disjunkte Vereinigung der Ereignisse 'Peter gewinnt in genau 4 Spielen' und 'Peter gewinnt in genau 5 Spielen' und berechnet sich als $p = 5 \cdot (\frac{15}{36})^4 \cdot \frac{21}{36} + (\frac{15}{36})^5 \approx 0,1\,.$