Prof. Dr. Uwe Küchler
Dr. Renate Winkler
Institut für Mathematik

Sommersemester 2007

Stochastik I

Lösungsansätze zur 10. Zusatzübung

1) Es sei $(X_n : n \geq 1)$ eine Folge von unabhängigen und zum Parameter 1 Cauchyverteilten Zufallsgrößen, d. h. X_1 besitzt die Dichte
$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$.

   a) Zeigen Sie, dass die Folge $Y_n := \frac{1}{n}\max\{X_1, \ldots, X_n\}, n \in \mathbb{N}_1$, in Verteilung konvergiert und bestimmen Sie die Grenzverteilung.

   b) Was können Sie über die Verteilung von $Z_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ sagen?

Lösung: a) Eine Cauchy-verteilte Zufallsgröße besitzt die Verteilungsfunktion
$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{\pi}(\arctan(x) + \frac{\pi}{2})$. Weiter ist

$$\begin{aligned} P(Y_n \leq x) &= P(\frac{1}{n}\max\{X_1, \ldots, X_n\} \leq x) = P(\max\{X_1, \ldots, X_n\} \leq nx) \\ &= P(X_1 \leq nx) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq nx) \ = \ F(nx)^n = \Big(\frac{1}{\pi}(\arctan(nx) + \frac{\pi}{2})\Big)^n \end{aligned}$$

Wir untersuchen punktweise (für feste x) den Grenzwert dieser Funktion für $n \longrightarrow \infty$. Wegen $\arctan z = y \Longleftrightarrow z = \tan y \Longleftrightarrow \frac{1}{z} = \cot y = \tan(y - \frac{\pi}{2}) \Longleftrightarrow \arctan\frac{1}{z} = y - \frac{\pi}{2}$ (für $y, z > 0$) gilt $\arctan(nx) = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{nx}$ für $x > 0$ und damit

$$\begin{aligned} P(Y_n \leq x) &= \Big(\frac{1}{\pi}(\arctan(nx) + \frac{\pi}{2})\Big)^n \ = \ \Big(1 - \frac{1}{\pi}\arctan\big(\frac{1}{nx}\big)\Big)^n \\ &= \Big(1 - \frac{1}{\pi nx} + o\big(\frac{1}{n}\big)\Big)^n \ \longrightarrow_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{\pi x}} \text{ für } x > 0. \end{aligned}$$

Weiter gilt $\arctan(nx) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{nx}$ für $x < 0$ und damit $P(Y_n \leq x) \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ für $x \leq 0$. Zusammengefasst konvergiert Y_n in Verteilung gegen Y mit Verteilungsfunktion
$F_Y(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{\pi x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$

b) Das arithmetische Mittel unabhängiger Cauchy-verteilter Zufallsgrößen ist wieder Cauchy-verteilt. Zum Beweis betrachten wir die charakteristischen Funktionen. Es gilt $\varphi_{X_1}(u) = \mathrm{E}\mathrm{e}^{iuX_1} = \mathrm{e}^{-|u|}$ und

$$\varphi_{Z_n}(u) = \mathrm{E}\mathrm{e}^{iuZ_n} = \mathrm{E}\mathrm{e}^{iu\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_n} = \prod_{k=1}^{n}\mathrm{E}\mathrm{e}^{iu\frac{1}{n}X_1} = \prod_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}|u|} = \mathrm{e}^{-|u|} = \varphi_{X_1}(u)\,.$$

2) Es sei $(X,Y)^T$ ein normalverteilter zufälliger Vektor mit den Parametern

$$\mu_X = \mu_Y = 0, \sigma_X^2, \sigma_Y^2 > 0 \text{ und } \rho \in (-1,1).$$

Man bestimme alle Winkel $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ als Funktion der Parameter σ_X, σ_Y und ρ, so dass die Zufallsgrößen U und V, definiert durch

$$U = X\cos\alpha + Y\sin\alpha, \quad V = X\sin\alpha - Y\cos\alpha,$$

unkorreliert sind. Sind sie in diesem Fall auch unabhängig?

Lösung: Nach Voraussetzung ist $(X,Y)^T$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Kovarianzmatrix $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$.

Ist C eine 2x2-Matrix und $(U,V)^T := C(X,Y)^T$, so ist $(U,V)^T$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Kovarianzmatrix $C\Sigma C^T$. Für die konkret gegebene Transformation berechnet man

$$\begin{aligned}\mathrm{Kov}(U,V) = \mathrm{E}UV &= \sin\alpha\cos\alpha(\sigma_X^2 - \sigma_Y^2) + (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)\rho\sigma_X\sigma_Y \\ &= \frac{1}{2}\sin(2\alpha)(\sigma_X^2 - \sigma_Y^2) - \cos(2\alpha)\rho\sigma_X\sigma_Y\end{aligned}$$

Ist $\sigma_X = \sigma_Y$ und $\rho = 0$, so sind U, V für alle betrachteten Winkel α unkorreliert.
Ist $\sigma_X = \sigma_Y$ und $\rho \neq 0$, so folgt $\cos(2\alpha) = 0$ und damit $\alpha = \pm\pi/4$.
Ist $\sigma_X \neq \sigma_Y$, so folgt $\tan(2\alpha) = \frac{2\rho\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_X^2 - \sigma_Y^2}$ bzw. $\alpha = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\rho\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_X^2 - \sigma_Y^2}$.

Da die zweidimensionale Normalverteilung durch ihre ersten und zweiten Momente eindeutig bestimmt ist, folgt aus der Unkorreliertheit die Unabhängigkeit. Unkorrelierte normalverteilte Zufallsvariablen sind unabhängig.

3) a) Es seien $X_1, \ldots X_n$ unabhängige, $\mathscr{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen. Zeige, dass $X_1^2 + \ldots + X_n^2$ eine $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$-verteilte Zufallsgröße ist. Eine Gamma-Verteilung mit diesen Parametern bezeichnet man auch als χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden.

b) Speziell für $n = 2$ ist also $X_1^2 + X_2^2$ exponentialverteilt zum Parameter $\frac{1}{2}$. Beweise die folgende Umkehrung dieser Aussage:
Sei U gleichverteilt auf $[0, 2\pi]$, und sei Z exponentialverteilt mit Parameter 1 und unabhängig von U. Dann sind

$$X = \sqrt{2Z}\cos U \quad \text{und} \quad Y = \sqrt{2Z}\sin U$$

unabhängig und $\mathscr{N}(0,1)$-verteilt sind.

Lösung: a) Vgl. Lemma 12.26. Wir untersuchen zunächst die Verteilung von X_1^2. Es ist

$F_{X_1^2}(x) = P(X_1^2 \leq x) = P(X_1 \in [-\sqrt{x}, \sqrt{x}]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-u^2/2}du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-u^2/2}du$

$f_{X_1^2}(x) = F'_{X_1^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\mathrm{e}^{-x/2}$. Dies ist die Dichte der $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ Verteilung.

Für die Gamma-Verteilung gilt die Eigenschaft, dass die Summe zweier unabhängiger $\Gamma(\alpha, \lambda)$ und $\Gamma(\beta, \lambda)$ - verteilter Zufallsgrößen $\Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$ -verteilt ist. Demzufolge ist $X_1^2 + \ldots + X_n^2$ $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$-verteilt.

b) Hintergrund dieser Aufgabe ist der Zusammenhang zwischen kartesischen und Polarkoordinaten. X, Y spielen die Rolle der kartesischen Koordinaten, U spielt die Rolle des Winkels und $R = \sqrt{2Z}$ spielt die Rolle des Radius bei Polarkoordinaten.
Nach Voraussetzung gilt $Z \sim EXP(1)$. Dann ist $Q := 2Z \sim EXP(\frac{1}{2})$. Als nächstes bestimmen wir die Verteilung von $R := \sqrt{Q}$:
$F_R(r) = P(R \leq r) = P(\sqrt{Q} \leq r) = P(Q \leq r^2) = \int_0^{r^2} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u/2}du = \int_0^r \mathrm{e}^{-v^2/2}v dv\,.$
Da Z und U unabhängig sind, sind auch R und U unabhängig und ihre gemeinsame Dichte berechnet sich als

$$f_{(R,U)}(r,u) = f_R(r) \cdot f_U(u) = \frac{r}{2\pi}\mathrm{e}^{-r^2/2}\,, \quad r > 0\,, u \in [0, 2\pi)\,.$$

Wegen $X = R\cos U$ und $Y = R\sin U$ erhalten wir X, Y aus R, U mit Hilfe der Transformation $h(r,u) = (r\cos u, r\sin u)^T$. Wir wollen die Dichtetransformationsformel anwenden und berechnen dazu die Umkehrabbildung g von h und deren Funktionaldeterminante. Es ist

$$h(r,u) = (x,y)^T \Longleftrightarrow (r,u)^T = g(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x})^T$$

auf der offenen Menge $\{x \neq 0\}$. Man berechnet $\det \mathscr{J}_g = 1/\sqrt{x^2+y^2}$ und erhält die gemeinsame Dichte
$f_{(X,Y)}(x,y) = f_{(R,U)}(g(x,y)) \cdot |\det \mathscr{J}_g| = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2\pi}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,.$
Dies ist die Dichte der zweidimensionalen Normalverteilung mit Erwartungswert $(0,0)^T$ und Kovarianzmatrix $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, womit die Behauptung bewiesen ist.