Prof. Dr. Uwe Küchler
Dr. Renate Winkler
Institut für Mathematik

Sommersemester 2007

Stochastik I

Lösungsansätze zur 2. Zusatzübung

1) Zeigen Sie, dass jede einelementige Menge $\{x\} \subset R_1$ eine Borelmenge ist, d.h. zur kleinsten σ-Algebra $\mathscr{B}_1$ gehört, die alle halboffenen Intervalle der Form $(a, b]$ $(a < b)$ enthält.
Lösung: Es genügt $\{x\}$ als abzählbaren Durchschnitt von halboffenen Intervallen darzustellen, etwa $\{x\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}(x - \frac{1}{n}, x]$.

2) Es seien A und B zwei unabhängige Ereignisse aus einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ (vgl. Übung 3.5).
   a) Man zeige, dass auch $\overline{A}$ und B, bzw. A und $\overline{B}$ bzw. $\overline{A}$ und $\overline{B}$ unabhängig sind.
   b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_B(.)$ aus Aufgabe 2.1 für den Fall $P(B) > 0$.
   c) Beim Zahlenlotto werden auf gut Glück nacheinander ohne Zurücklegen sechs Zahlen aus $\{1, 2, \ldots, 49\}$ gezogen. Sind die Ereignisse $A :=$ "Beim ersten Ziehen erscheint eine der sechs Zahlen meines Tippscheines" und $B :=$ "Beim zweiten Ziehen erscheint eine der sechs Zahlen meines Tippscheines" unabhängig?

Lösung: a) Man überprüft, dass die Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts zweier dieser Mengen gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten ist, exemplarisch führen wir dies für $\overline{A}$ und B vor.

$$P(\overline{A} \cap B) = P((\Omega \setminus A) \cap B) = P(B \setminus (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B)$$
$$= (1 - P(A))P(B) = P(\overline{A})P(B)\,.$$

b) $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$

c) Nein, es gilt $P(A) = P(B) = \frac{6}{49}$ aber $P(A \cap B) = \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \neq P(A) \cdot P(B)$.