Prof. Dr. Uwe Küchler
Dr. Renate Winkler
Institut für Mathematik

Sommersemester 2007

Stochastik I

Lösungsansätze zur 3. Zusatzübung

1) Bei einem Fernsehquiz kann der Kandidat ein Auto gewinnen, wenn er errät, hinter welcher von drei verschlossenen Türen sich das Auto befindet. Nachdem der Kandidat eine der Türen benannt hat, öffnet der Quizmaster von den beiden anderen Türen eine, hinter der sich das Auto nicht befindet (falls es zwei solcher Türen gibt, wird eine der beiden rein zufällig Wahrscheinlichkeit ausgewählt). Danach darf der Kandidat seine Entscheidung noch einmal revidieren. Kann er seine Gewinnchancen erhöhen, wenn er sich für die vom Quizmaster nicht geöffnete, übriggebliebene Tür umentscheidet?
Lösung: Der Kandidat entscheidet sich mit einer Wahrscheinlichkeit von genau 1/3 mit seiner ersten Wahl für die Tür, hinter der sich das Auto befindet. Mit der Wahrscheinlichkeit von genau 2/3 befindet sich das Auto also nicht dahinter, sondern hinter einer der anderen Türen.
Wenn der kandidat wechselt, hat er eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 2/3, bleibt er bei seiner ersten Wahl, so beträgt seine Gewinnwahrscheinlichkeit nur 1/3.

2) Es sei f die Dichte der Gammaverteilung mit den Parametern $\alpha, \lambda > 0$, d. h.

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \quad x \in R_1.$$

Man zeige, dass diese Dichte unimodal ist und bestimme den Modalwert in Abhängigkeit von α und λ.
Lösung: Wir fragen nach den Extremalwerten der Dichte und wenden dazu Techniken der Kurvendiskussion auf die Funktion $f_0(x) = x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda x}$ an, die sich auf dem Intervall $(0, \infty)$ nur durch einen konstanten Faktor von der Dichte $f(x)$ unterscheidet. Deren Ableitung

$$f_0'(x) = (\alpha-1)x^{\alpha-2}\mathrm{e}^{-\lambda x} + x^{\alpha-1}(-\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda x} = x^{\alpha-2}\mathrm{e}^{-\lambda x}(\alpha - 1 - \lambda x)$$

wird 0 im lokalen Extremwert $x_0 = (\alpha - 1)\ \lambda$. Damit ist die Dichte unimodal mit Modalwert x_0, falls $\alpha > 1$ und mit Modalwert in 0, falls $\alpha \leq 1$.

3) Die Zufallsgröße X sei gleichmäßig auf $[0, 1]$ verteilt. Wie lautet die gemeinsame Verteilungsfunktion von (X, Y) mit $Y = 1 - X$? Besitzt der zufällige Vektor (X, Y) eine Dichte? Geben Sie seine Randverteilungsfunktionen an.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x, 1 - X \le y) = P(X \le x, X \ge 1 - y) \\
&= \begin{cases} (x \wedge 1) \vee 0 & \text{für } y \ge 1 \\ (y \wedge 1) \vee 0 & \text{für } x \ge 1 \\ 0 & \text{für } y \le 0 \text{ oder } x \le 0 \text{ oder } x + y < 1 \\ x + y - 1 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Die Randverteilungen sind $F(x,\infty) = (x \wedge 1) \vee 0$ und $F(\infty, y) = (y \wedge 1) \vee 0$.

F besitzt keine Dichte, denn es ist $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y) = 0$ auf R_2 mit Ausnahme von Mengen mit Maß 0.