Prof. Dr. Uwe Küchler
Dr. Renate Winkler
Institut für Mathematik

Sommersemester 2007

Stochastik I

Lösungsansätze zur 6. Zusatzübung

1) Es sei X eine mit dem Parameter $\lambda > 0$ Poissonverteilte Zufallsgröße und n eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$. Man zeige, dass gilt

$$\mathrm{E}(X^n) = \lambda \mathrm{E}\left[(\mathrm{X}+1)^{\mathrm{n}-1}\right]$$

Berechnen Sie damit $\mathrm{E}(X^3)$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^n) &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k^n \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^n \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \mathrm{E}(X+1)^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^2) &= \lambda \mathrm{E}(X+1) = \lambda(\lambda+1) = \lambda^2 + \lambda \\
\mathrm{E}(X^3) &= \lambda \mathrm{E}(X+1)^2 = \lambda \mathrm{E}(X^2 + 2X + 1) = \lambda(\lambda^2 + \lambda + 2\lambda + 1) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda
\end{aligned}$$

2) Eine Urne enthalte anfangs eine rote und eine schwarze Kugel. Nacheinander wird eine der in der Urne befindlichen Kuglen rein zufällig ausgewählt und gemeinsam mit einer weiteren Kugel derselben Farbe zurückgelegt. Es sei X die Nummer desjenigen Zuges, bei dem zum ersten Mal eine rote Kugel gezogen wird.

   a) Man berechne $P(X > n)$.
   b) Man beweise $P(X < \infty) = 1$, d.h., mit Wahrscheinlichkeit Eins wird irgendwann eine rote Kugel gezogen.
   c) Man bestimme $\mathrm{E}X$.

Lösung Es sei X_i die Zufallsvariable mit Werten in $\{r, s\}$, die angibt, ob im i-ten Zug eine rote oder eine schwarze Kugel gezogen wird. Dann gilt

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= P(X_1 = s,\, X_2 = s,\, \ldots,\, X_{k-1} = s,\, X_k = r) \\
&= P(X_1 = s) \cdot P(X_2 = s | X_1 = s) \cdots P(X_{k-1} = s | X_1 = \ldots = X_{k-2} = s) \\
&\qquad \cdot P(X_k = r | X_1 = \ldots = X_{k-1} = s) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

a) $P(X > n) = 1 - P(X \leq n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} P(X = k) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1}$

b) $P(X < \infty) = P(\cup_{n=1}^{\infty} X \leq n) = \lim_{n\to\infty} P(X \leq n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(X > n) = 1$

c) $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty$