Prof. Dr. Uwe Küchler
Dr. Renate Winkler
Institut für Mathematik

Sommersemester 2007

Stochastik I

Lösungsansätze zur 9. Zusatzübung

1) (Spezialfall des Satzes von Radon-Nikodym)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, X eine integrierbare Zufallsgröße über $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und $\mathscr{H}$ eine endliche Teil-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$. Man zeige:

a) Es gibt ein $n \geq 1$ und eine Zerlegung $(H_1, H_2, \dots, H_n)$ von Ω in $\mathfrak{A}$-meßbare Teilmengen, so dass

$$\mathscr{H} = \left\{ \bigcup_{i \in I} H_i | I \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \right\}$$

(I durchläuft alle Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$.)

b) Man zeige: Es gibt eine $\mathscr{H}$-meßbare Zufallsgröße Y auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit

$$\int_H Y dP = \int_H X dP, \ H \in \mathscr{H},$$

und konstruiere Y.

c) Die Zufallsgröße Y nennt man bedingte Erwartung von X unter der Hypthese $\mathscr{H}$. Können Sie diese Bezeichnung begründen? (Bezeichung: $Y = E(X|\mathscr{H})$)
Was ergibt sich für $\mathscr{H} = \{\emptyset, \Omega\}$?

Lösung: a) Sei $\mathscr{H} = \{A_1, \dots, A_m\}$. Wir zeigen, dass es unter den $A_j, j = 1, \dots, m$ eine Menge von nichtleeren, disjunkten Atomen $H_i, i = 1, \dots, n$, gibt, die ebenfalls $\mathscr{H}$ erzeugen. (Ein Element H von $\mathscr{H}$ heißt Atom, falls aus $H' \in \mathscr{H}, H' \subseteq H, H' \neq H$ folgt $H' = \emptyset$.) Dabei gehen wir induktiv vor. Ausgehend von $\mathscr{H}_m = \mathscr{H} \setminus \{\emptyset\}$ verkleinern wir Mengensysteme $\mathscr{H}_k = \{A_{i_1}, \dots, A_{i_k}\}$ sukzessive unter Beibehaltung der Eigenschaft, dass $\mathscr{H}_k$ alle nichtleeren Durchschnittsmengen ihrer Mengen enthält und $\mathscr{H}$ erzeugt.
b) Die $\mathscr{H}$-mesbaren Zufallsgrößen sind gerade einfache Zufallsgrößen der Form $Y = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{H_i}$ mit Koeffizienten $\alpha_i \in R_1$, $i = 1, \dots, n$.
Verwendet man diesen Ansatz in $\int\limits_{H_i} X dP = \int\limits_{H_i} Y dP = \int\limits_{H_i} \alpha_i dP = \alpha_i P(H_i)$, so folgt $\alpha_i = \frac{1}{P(H_i)} \int\limits_{H_i} X dP$ und $Y = \sum_{i=1}^n \frac{1}{P(H_i)} \int\limits_{H_i} X dP \cdot \mathbb{1}_{H_i}$ erfüllt das Geforderte.
c) Für $\mathscr{H} = \{\emptyset, \Omega\}$ ergibt sich $I = \{1\}, H_1 = \Omega$ und $Y = \frac{1}{P(\Omega)} \int\limits_{\Omega} X dP \cdot \mathbb{1}_{\Omega} = EX$.

Y spiegelt die in $\mathscr{H}$ über X zur Verfügung stehende Information wieder. Es gilt

$$\alpha_i = \frac{1}{P(H_i)} \int\limits_{H_i} X dP = \int\limits_{\Omega} X dP(\omega|H_i) = E(X|H_i) \quad i = 1, \ldots, n \,.$$

2) Zwei Zufallsgrößen X und Y mögen folgende Eigenschaften besitzen:

   a) X und Y sind unabhängig und haben differenzierbare Dichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$.

   b) Die gemeinsame Dichte $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ hängt von (x,y) nur durch x^2+y^2 ab:

$$f(x,y) = g(x^2+y^2) \text{ für eine Funktion } g \qquad (*)$$

zeigen Sie, dass dann X und Y beide normalverteilt mit Erwartungswert Null und einer gleichen Streuung σ^2 sind.

Hinweis: Differenzieren Sie $(*)$ nach x und berechnen Sie $\frac{f'_X(s)}{2xf_X(x)}$. Zeigen Sie, dass dieser Ausdruck nicht von x abhängt und lösen Sie die daraus entstehende Differenzialgleichung. Nutzen Sie die Eigenschaft, dass f_X eine Dichte ist, um Konstanten zu bestimmen. Analog verfahren Sie mit f_Y.
Lösung: Wir betrachten die Funktion g auf $g \neq 0$. Dort gilt auch $f_X \neq 0$, $f_Y \neq 0$.

$$\begin{aligned} f_X(x)f_Y(y) &= g(x^2+y^2) && \mid \ln \\ \ln f_X(x) + \ln f_Y(y) &= \ln g(x^2+y^2) && \mid \frac{d}{dx} \\ \frac{f'_X(x)}{f_X(x)} &= 2x \cdot \frac{g'(x^2+y^2)}{g(x^2+y^2)} && \end{aligned}$$

Wir wählen $x_0 \neq 0$ und setzen $g_0(y) = g(x_0^2+y^2)\,, \quad \beta = \frac{f'_X(x_0)}{2x_0 f_X(x_0)}$. Es folgt
$g'_0(y) = \beta g_0(y)$ mit der Lösung $g_0(y) = \alpha e^{\beta y}$, also $g(x_0^2+y^2) = \alpha e^{\beta(x_0^2+y^2)}$, also

$$f(x,y) = \alpha e^{\beta(x^2+y^2)} \,.$$

Aus der Tatsache, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte, und damit integrierbar mit Integral 1 ist, folgt zunächst, dass $\beta < 0$. Wir setzen $\beta = -\frac{1}{2\sigma^2}$ für ein $\sigma^2 > 0$. Weiter folgt $\alpha = \frac{1}{2\pi\sigma^2}$. Zusammengefasst

$$f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2))\,.$$

Für $x=0$ folgt $f_X(0)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(y^2))$, und wiederum aus der Tatsache, dass f_Y eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, folgt $f_X(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ und $Y \sim N(0,\sigma^2)$. Analog ergibt sich $X \sim N(0,\sigma^2)$.