Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

Statistik stochastischer Prozesse

1. Übung, 23. 04. 2008

1. Es sei X ein n-dimensionaler zufälliger Vektor mit der Verteilungsfunktion F. Man zeige:

   a) Die Menge
   $I_F := \{u \in R_n | \int\limits_{R_n} \exp(< u, x >)F(dx) < \infty\}$
   ist eine konvexe Menge mit $0 \in I_F$.

   b) Ist $0 \in \overset{o}{I}_F$, so ist die Kumulantenfunktion ψ_F von F, definiert durch
   $\psi_F(u) := ln \int\limits_{R_n} \exp(< u, x >)F(dx),\ u \in I_F,$
   auf $\overset{o}{I}_F$ unendlich oft differenzierbar, und es gilt

   $$grad\ \psi_F(0) = EX \text{ und } \left(\frac{\partial^2 \psi_F}{\partial u_i \partial u_j}(u)\Big|_{u=0} \right) = Kov(X).$$

   $\psi_F(u)$ ist steng konvex, außer für den Fall, dass es ein $a \in R_n$ gibt mit $< a, X >= 0$ fast sicher.

   c) Durch
   $F_u(dx) := \int\limits_{(-\infty,x]} \exp(< u, x > -\psi_F(u))F(dx),\ u \in I_F,$
   wobei
   $(-\infty, x] := (-\infty, x_1]\ \times \ldots \times\ (-\infty, x_n]$
   gesetzt wird, ist eine Familie $(F_u : u \in I_F)$ von Verteilungsfunktionen auf R_n definiert, die sogenannte von F erzeugte *(kanonische) Exponentialfamilie.*

   d) Ist $(F_u : u \in I_F)$ die von F erzeugte Exponentialfamilie, und gilt $u' \in I_F$, so ist $(F_v : v \in I_{F_{u'}})$ mit $(F_u : u \in I_F)$ identisch. Es gilt

   $$\psi_{F_{u'}}(v) = \psi_F(v + u') - \psi_F(u'),\ v \in I_{F_{u'}} = I_F - \{u'\}$$

   e) Man berechne $E_u X$ und $Kov_u X$

f) Ist X eine reellwertige Zufallsgröße mit der Verteilungsfunktion F und $X^{(n)} := (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ eine mathematische Stichprobe aus einer nach F verteilten Grundgesamtheit (also $F_{X^{(n)}} = \underbrace{F \otimes F \otimes \ldots \otimes F}_{n-\text{mal}}$), so gilt

$$F_{X^{(n)},u}(dx) = \prod_{k=1}^{n} F_{u_k}(dx_k) \ ,$$
$$u = (u_1, \ldots, u_n)^T \in R_n,$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in R_n.$$

g) Man gebe die von folgenden Verteilungen erzeugten kanonischen Exponentialfamilien an:
i)Exp(λ), ii) Poisson (λ), iii) $\Gamma(\alpha, \lambda)$, iv)N(μ, σ^2)

2. Es sei $(X_n)_{0 \le n \le N}$ eine Markovsche Kette auf dem Zustandsraum $\{0, 1\}$ mit $X_0 = i_0 \in \{0, 1\}$ und den Übergangswahrscheinlichkeiten $p_0 = I\!P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0), q_0 = I\!P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0), p_1 = I\!P(X_{x+1} = 0 | X_n = 1)$ und $q_1 = I\!P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1)$ sowie der Anfangsverteilung $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 0) = \frac{1}{2}$. Es gelte $p_0, p_1 \in (0, 1)$.

   a) Stellen Sie die Likelihoodfunktion auf und bestimmen Sie Maximum-Likelihoodschätzungen von p_0, q_0, p_1, q_1.

   b) Untersuchen Sie die erhaltenen Schätzungen hinsichtlich Konsistenz.