Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

Statistik stochastischer Prozesse

3. Übung, 21. 05. 2008

3.1 Es sei $(X(t), t \geq 0)$ Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX(t) = -a(X(t) - \varrho)dt + \sigma dB(t), \quad t \geq 0$$

mit $X(0) = X_0$, wobei X_0 eine von $(B(t), t \geq 0)$ unabhängige Zufallsgröße sei, deren Verteilung nicht von (a, ϱ) abhängt.
Es gelte $\vartheta = (a, \varrho) \in (0, \infty) \times R_1 =: \Theta$.

Man bestimme die Maximum-Liklihood-Schätzung für ϑ auf der Basis der Beobachtung von $(X(t), t \in [0, T])$.

3.2 Es sei $(Z_n, n \geq 0)$ ein Verzweigungsprozess mit $Z_0 = i_0 \geq 1$ und der Nachkommensverteilung

$$p_j(\vartheta) = \frac{\vartheta^j p_j}{[\varphi(\vartheta)]}, j \geq 0$$

mit $p_j \geq 0\, (j \geq 0), \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j = 1$ und $\vartheta \in \Theta := \{ \sum\limits_{j \geq 0} \vartheta^j p_j =: \varphi(\vartheta) < \infty \}$.
Das bedeutet, Z_n ist die Anzahl der Individuen in einer bestimmten Population zur Zeit n (d.h., in der n-ten Generation). Jedes Individum erzeugt in einer Zeiteinheit unabhängig von den anderen und von der Vergangenheit eine zufällige Anzahl von neuen Individuen und verschwindet selbst. Diese Anzahl habe die Verteilung $(p_j(\vartheta), j \geq 0)$, der Parameter ϑ sei unbekannt.

Man berechne:

a) die Likelihoodfunktion
$L_n(\vartheta; i_0, i_1, \cdots, i_n) = P_\vartheta(Z_1 = i_0, Z_2 = i_1, \cdots, Z_n = i_n)$,

b) $E_\vartheta Z_n, \mathrm{Var}_\vartheta(\mathrm{Z_n})$,

c) eine Maximum-Likelihood Schätzung für $\mu(\vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k(\vartheta)$.

3.3 Es sei $\mathscr{P}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einem meßbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$, $\mathscr{P} = (P_\vartheta, \vartheta \in \Theta)$ mit $\Theta \subseteq R_k$. Weiterhin seien $\mathscr{H}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ und Y eine nichtnegative Zufallsgröße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Die Familie $\mathscr{P}$ werde dominiert durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P. Man zeige, daß P_ϑ-f.s. gilt:

$$\begin{aligned} E_\vartheta[Y|\mathscr{H}] &= \frac{E_P[L(\vartheta)Y|\mathscr{H}]}{E_P[L(\vartheta)|\mathscr{H}]} \quad \text{auf} \quad E[L(\vartheta)|\mathscr{H}] > 0 \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{auf} \quad E[L(\vartheta)|\mathscr{H}] = 0 \end{aligned}$$

wobei $L(\vartheta) := \frac{dP_\vartheta}{dP},\ \vartheta \in \Theta$.