Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

WS 2005/06

Stochastische Differentialgleichungen

7. Übung, 23. 01. 2006

1. Unter welchen Bedingungen an $a, b \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ ist die stochastische Differenzialgleichung
$$dX_t = aX_t^n \, dt + bX_t^m \, dW_t$$
auf eine lineare stochastische Differenzialgleichung reduzierbar?

2. Man bestimme die Übergangswahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(t, x, B)$ der geometrischen Brownschen Bewegung
$$dX_t = \mu X_t \, dt + \sigma X_t \, dW_t, \quad t \geq 0, \; X_0 = x.$$

3. Es seien $(X_t, \; t \geq 0)$ ein Wienerscher Prozess mit Drift $\mu \geq 0$ und Diffusionskoeffizient $\sigma \neq 0$ sowie $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < x < b$.

   a) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit
   $$\mathbb{P}_x(\tau_a < \tau_b) \quad \text{mit} \;\; \tau_c := \inf\{t > 0 \; : \; X_t = c\}, c = a \text{ oder } c = b.$$

   b) Weiterhin berechne man
   $$\mathbb{P}_x(\tau_a < \infty), \quad \mathbb{P}_x(\tau_b < \infty), \quad \mathbb{E}_x(\tau_{(a,b)}), \quad \mathbb{E}_x(\tau_a), \quad \mathbb{E}_x(\tau_b)$$
   mit $\tau_{(a,b)} := \inf\{t > 0 \; : \; X_t \notin (a, b)\}$.

   c) Mit Hilfe der Formel für $\mathbb{P}_x(\tau_a < \infty)$ $(a < 0)$ bestimme man die Verteilung von
   $$M := \min_{s \geq 0} X_s.$$

4. Es sei $Y_t = (t, W_t)$, $t \geq 0$, wobei $(W_t,\ t \geq 0)$ ein reellwertiger Standard Wienerprozess sei.

   a) Man zeige, daß $(Y_t, t \geq 0)$ ein Itô-Diffusionsprozess ist und bestimme seine Übergangswahrscheinlichkeiten und seinen infinitesimalen Generator A.

   b) Angenommen, (Y_t) startet in $(s, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von τ_L und Y_{τ_L} mit $L > s$ und

   $$\tau_L := \inf\{t > 0 \ :\ Y_t \notin [0, L] \times \mathbb{R}\}.$$

   c) Ist f eine $C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R})$-Funktion mit $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, so ist

   $$f(s, x) = \int_{\mathbb{R}} f(L, x)\mu_L(\,dx).$$

   Mittels der Ergebnisse von b) ermittle man das Maß μ_L.

5. Es sei $(X_t,\ t \geq 0)$ eine Itô-Diffusion. Durch

$$< f, g >_m := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)m(\,dx)$$

mit $f, g \in C_0^2(\mathbb{R})$, m das Geschwindigkeitsmaß von X, ist ein Skalarprodukt auf $C_0^2(\mathbb{R})$ definiert. Man zeige, daß gilt:

$$< Af, g >_m = < f, Ag >_m, \quad < Af, f >_m \leq 0.$$

Bemerkung: A ist ein symmetrischer, nichtpositiver, nicht beschränkter linearer Operator in $L_2(m)$ mit $C_0^2 \subseteq D_A \cap L_2(m)$. (ohne Beweis)
($C_0^2(R)$ = Menge aller zweimal stetig differenzierbaren Funktionen auf R mit kompaktem Träger)