Prof. Dr. Uwe Küchler
Dipl.Math. Hagen Gilsing

Wintersemester 2007/2008

Risikotheorie

2. Übungsserie

2.1 (2 Punkte) Eine Signalquelle sendet pro Zeiteinzeit eine zufällige Anzahl A von Signalen aus, die gemäß einer Poissonverteilung zu dem Parameter $\lambda > 0$ verteilt ist. Ein Zähler registriert jedes dieser Signale unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.8$. Es bezeichne Z die Anzahl der registrierten Signale. Welche Verteilung besitzt Z?

2.2 (4 Punkte) Man beweise die folgenden Aussagen:

(i) Es sei $P = (p_k)_{k=0,1,2,\dots}$ eine Poisson-, Negative Binomial- oder Binomialverteilung. Dann gibt es Zahlen a und b mit $a + b > 0$, so dass

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right)p_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

(ii) Es sei $P = (p_k)_{k=0,1,2,\dots}$ eine Verteilung mit $p_k = P(\{k\}), k = 0, 1, 2, \dots$.
Gilt $p_0 < 1$ und gibt es Zahlen a und b mit

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right)p_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

so ist P eine der Verteilungen aus (i).

2.3 (4 Punkte) Es sei X eine nichtnegative Zufallsgröße und L ihre Laplacetransformierte, d. h.

$$L(u) := E\mathrm{e}^{uX} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ux} F(dx), \quad u \geq 0.$$

Die Funktion ψ, definiert durch

$$\psi(u) := lnL(u), \quad u > 0$$

nennt man *kumulantenerzeugende Funktion* von X bzw. von F.

Für $u > 0$ ist ψ an der Stelle u unendlich oft differenzierbar. Falls $EX^k < \infty$, so existieren die Grenzwerte

$$\lim_{u \downarrow 0} (-1)^l \frac{d^l \psi}{du^l}(u) =: \kappa_l, \quad 1 \leq l \leq k$$

und sind endlich. Die Zahl κ_l heißt die l-te Kumulante (=Semiinvariante) von X bzw. F.

Zeigen Sie:

a) $\kappa_1 = EX, \kappa_2 = Var(x)$.
b) Beim Übergang von X zu $X + b$ (b konstant) bleiben alle $\kappa_k (k > 1)$ unverändert.
c) Sind X und Y unabhängige Zufallsgrößen mit

$$E|X|^k < \infty, E|Y|^k < \infty$$

so gilt

$$\kappa_l^{(X+Y)} = \kappa_l^{(X)} + \kappa_l^{(Y)}, \ 1 \leq l \leq k.$$

2.4 (2 Punkte) Die Zufallsgröße N habe eine gemischte Poissonverteilung mit dem
Mischungsmaß U:

$$p_k := P(N = k) = \int_0^\infty \frac{u^k}{k!} \, \mathrm{e}^{-u} U(du), \quad k \geq 0, U\Big((0, \infty)\Big) = 1.$$

Man berechne die erzeugende Funktion $M_N(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k z^k (|z| < 1)$ unter Verwendung der Laplacetransformierten $L_U(s) = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-su} U(du)$.